

AG
T

*Algebraic & Geometric
Topology*

Volume 24 (2024)

**Automorphismes du groupe des automorphismes
d'un groupe de Coxeter universel**

YASSINE GUERCH



Automorphismes du groupe des automorphismes d'un groupe de Coxeter universel

YASSINE GUERCH

À l'aide de l'outre-espace de Guirardel et Levitt d'un produit libre, nous démontrons que le groupe des automorphismes extérieurs du groupe des automorphismes extérieurs du groupe de Coxeter universel de rang $n \geq 5$ est trivial, et qu'il s'agit d'un groupe cyclique d'ordre 2 si $n = 4$. Nous démontrons aussi que le groupe des automorphismes extérieurs du groupe des automorphismes du groupe de Coxeter universel de rang $n \geq 4$ est trivial.

Using the Guirardel–Levitt outer space of a free product, we prove that the outer automorphism group of the outer automorphism group of the universal Coxeter group of rank $n \geq 5$ is trivial, and that it is a cyclic group of order 2 if $n = 4$. In addition we prove that the outer automorphism group of the automorphism group of the universal Coxeter group of rank $n \geq 4$ is trivial.

20E08, 20E36, 20F28, 20F55

1 Introduction

Soit n un entier plus grand que 2. On note $F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ un groupe cyclique d'ordre 2 et $W_n = *_n F$ un groupe de Coxeter universel de rang n , produit libre de n copies de F . Si G est un groupe, on note $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Int}(G)$ son groupe d'automorphismes extérieurs. Nous démontrons dans cet article les résultats suivants.

Théorème 1.1 *Si $n \geq 5$, alors $\text{Out}(\text{Out}(W_n)) = \{1\}$. Si $n = 4$, alors $\text{Out}(\text{Out}(W_n))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Théorème 1.2 *Si $n \geq 4$, alors $\text{Out}(\text{Aut}(W_n)) = \{1\}$.*

De tels résultats sont déjà connus dans le cas où $n = 2$ (voir par exemple [Thomas 2020, Lemmas 1.4.2 and 1.4.3]) où tous les automorphismes de $\text{Out}(W_2)$ sont intérieurs et où le groupe $\text{Out}(\text{Aut}(W_2))$ est un groupe cyclique d'ordre 2. Dans le cas où $n = 3$, les groupes $\text{Aut}(W_3)$ et $\text{Out}(W_3)$ sont isomorphes à $\text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ et $\mathbb{P}\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ respectivement, avec \mathbb{F}_2 un groupe libre de rang 2 (voir par exemple [Varghese 2021, Lemma 2.3]). Nous obtenons donc une description de $\text{Out}(\text{Out}(W_n))$ pour tout entier n .

De telles questions de rigidité algébrique ont déjà été résolues dans des cas similaires. En effet, Mostow [1973] a démontré que le groupe des automorphismes extérieurs de réseaux irréductibles uniformes de groupes de Lie réels, connexes, semi-simples et non localement isomorphes à $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est fini. De même,

Ivanov [1997, Theorem 2] a démontré un résultat similaire dans le cas du groupe modulaire d'une surface compacte, connexe, orientable de genre $g \geq 2$. Enfin, Bridson et Vogtmann [2000] ont démontré que tout automorphisme du groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe libre de rang N (avec $N \geq 3$) est une conjugaison. Ce dernier cas a motivé l'étude de la rigidité algébrique de $\text{Out}(W_n)$, d'une part à cause de la propriété d'universalité pour les groupes engendrés par des éléments d'ordre 2 de W_n , d'autre part car, si $n \geq 3$, le groupe $\text{Aut}(W_n)$ s'injecte dans $\text{Aut}(F_{n-1})$ (voir par exemple [Mühlherr 1997, Theorem A]). Néanmoins, cette injection ne donne aucune piste de déduction des théorèmes 1.1 et 1.2 à partir du théorème de Bridson et Vogtmann. Peu de choses sont connues pour $\text{Aut}(W_n)$. Une partie génératrice finie a été construite par Mühlherr [1997, Theorem B], et une présentation a été donnée par Gilbert [1987] dans le contexte plus général du groupe des automorphismes d'un produit libre, suivant [Fouxe-Rabinovitch 1941]. Plus récemment, Varghese [2021, Theorem C] a démontré que le groupe $\text{Aut}(W_n)$ n'a pas la propriété (T) de Kazhdan. Dans tous les cas, les techniques d'étude de $\text{Aut}(W_n)$ sont principalement combinatoires et géométriques. Mentionnons enfin que l'étude du groupe $\text{Aut}(W_n)$ est en lien avec l'étude du groupe des automorphismes symétriques d'un produit libre étudié par McCullough et Miller [1996] (mais celle-ci ne donne aucune piste de déduction des théorèmes 1.1 et 1.2) et qu'il serait intéressant de connaître des résultats similaires dans ce contexte plus général.

Pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2, nous étudions l'action de $\text{Out}(W_n)$ sur un complexe simplicial de drapeaux introduit par Guirardel et Levitt. Plus précisément, nous cherchons à comprendre les stabilisateurs de certains sommets de ce complexe. En effet, les stabilisateurs de ces sommets formant une partie génératrice de $\text{Aut}(W_n)$ et $\text{Out}(W_n)$, comprendre l'image de ces stabilisateurs par des automorphismes de $\text{Aut}(W_n)$ et $\text{Out}(W_n)$ nous permettra de faciliter l'étude de ces derniers. L'étude de l'action de $\text{Out}(W_n)$ sur un complexe simplicial se justifie également par la démonstration des théorèmes similaires dans les cas des réseaux des groupes de Lie semi-simples, du groupe modulaire d'une surface de type fini et du groupe des automorphismes d'un groupe libre qui passait également par l'étude de l'action du groupe étudié sur un espace géométrique adapté. En particulier, dans le cas du groupe des automorphismes extérieurs d'un groupe libre de rang N , cet objet géométrique était *l'outre-espace de Culler et Vogtmann* CV_N [1986].

Dans le cas de W_n , Guirardel et Levitt [2007b] ont introduit un espace topologique analogue à *l'outre-espace de Culler et Vogtmann*, appelé *l'outre-espace d'un produit libre*. Dans le cas d'un produit libre de copies de F , cet espace sera noté $\mathbb{P}\mathbb{O}(W_n)$. Ce dernier est défini comme un ensemble de classes d'homothétie de graphes métriques marqués de groupes, dont le groupe fondamental est isomorphe à W_n . Muni de la topologie dite *faible*, l'espace $\mathbb{P}\mathbb{O}(W_n)$ se rétracte par déformation forte sur un complexe simplicial de drapeaux, appelé *l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{O}(W_n)$* . Le groupe $\text{Out}(W_n)$ agit naturellement sur $\mathbb{P}\mathbb{O}(W_n)$ et sur son épine par précomposition du marquage. Le groupe $\text{Aut}(W_n)$ agit quant à lui sur *l'outre-espace de W_n* , noté $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$. Nous renvoyons à la section 2 pour des précisions.

La démonstration du théorème 1.1 est inspirée de celle de [Bridson et Vogtmann 2000] dans le cas d'un groupe libre, mais des complications structurelles apparaissent, nécessitant de nouvelles idées et méthodes. Nous présentons la démonstration dans le cas de $\text{Out}(W_n)$, le cas de $\text{Aut}(W_n)$ étant similaire et présenté

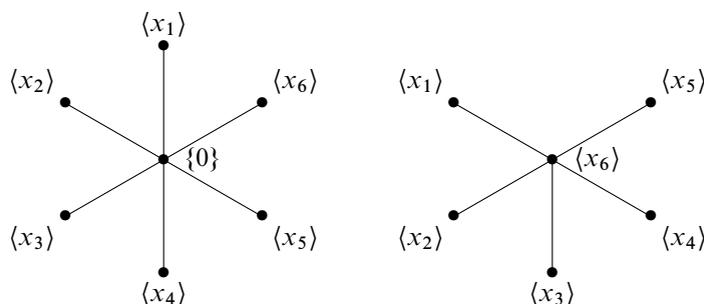


FIGURE 1: Exemples de graphes de groupes dont les classes d'équivalence sont respectivement une $\{0\}$ -étoile et une F -étoile (cas $n = 6$). Les arêtes ont des groupes associés triviaux. L'ensemble $\{x_1, \dots, x_6\}$ est une partie génératrice standard de W_6 .

dans des remarques suivant les démonstrations dans le cas de $\text{Out}(W_n)$. Son plan, très simplifié, est le suivant. L'épine de l'outre-espace $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$ contient deux types de sommets distingués, à savoir les $\{0\}$ -étoiles et les F -étoiles, voir la section 2 et la figure 1. Ceci diffère de l'épine de l'outre-espace de Culler et Vogtmann pour lequel il existe un unique type de sommets distingués, à savoir les roses.

Nous étudions tout d'abord les stabilisateurs des $\{0\}$ -étoiles et des F -étoiles sous l'action de $\text{Out}(W_n)$. Le stabilisateur d'une $\{0\}$ -étoile est isomorphe à \mathfrak{S}_n . Il correspond à la permutation des feuilles de la $\{0\}$ -étoile. Le stabilisateur d'une F -étoile est isomorphe à $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$. Il correspond à la permutation des feuilles de la F -étoile ainsi qu'à l'application de conjugaisons partielles dont le conjugué est contenu dans le groupe associé au centre de la F -étoile. Nous montrons dans la section 3 les caractérisations suivantes des stabilisateurs de $\{0\}$ -étoiles et de F -étoiles (voir les propositions 3.1, 3.6 et 3.9).

Proposition 1.3 Soit $n \geq 5$.

- (1) Tout sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à \mathfrak{S}_n fixe un unique point de l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$; et ce point est une $\{0\}$ -étoile.
- (2) Tout sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$ fixe un unique point de l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$; et ce point est une F -étoile.
- (3) Les stabilisateurs des F -étoiles sont les sous-groupes finis d'ordre maximaux de $\text{Out}(W_n)$.

La proposition 1.3 caractérise de ce fait les stabilisateurs de $\{0\}$ -étoiles et de F -étoiles, qui sont les sous-groupes de $\text{Out}(W_n)$ isomorphes à \mathfrak{S}_n et $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$, respectivement. Ces caractérisations représentent une situation nouvelle en comparaison de la preuve de [Bridson et Vogtmann 2000] dans le cas d'un groupe libre. Notons par ailleurs que le stabilisateur d'une $\{0\}$ -étoile correspond au groupe des permutations d'une partie génératrice de W_n et que ce groupe remarquable intervenait déjà dans l'étude faite en [Varghese 2021] de l'action de $\text{Aut}(W_n)$ sur des espaces $\text{CAT}(0)$.

La proposition 1.3 implique alors que tout automorphisme α de $\text{Out}(W_n)$ préserve l'ensemble des stabilisateurs de $\{0\}$ -étoiles et l'ensemble des stabilisateurs de F -étoiles. Fixons $\alpha \in \text{Aut}(\text{Out}(W_n))$.

Le groupe $\text{Out}(W_n)$ agissant transitivement sur l'ensemble des $\{0\}$ -étoiles, nous pouvons supposer que α induit un automorphisme du stabilisateur d'une $\{0\}$ -étoile \mathcal{X} . Les stabilisateurs de $\{0\}$ -étoiles étant isomorphes à \mathfrak{S}_n , si $n \geq 5$ et $n \neq 6$, nous pouvons supposer que la restriction de α au stabilisateur de \mathcal{X} est égale à l'identité. Nous montrons alors qu'un tel α préserve le stabilisateur d'une F -étoile \mathcal{Y} adjacente à \mathcal{X} , et que la restriction de α au stabilisateur de \mathcal{Y} est en fait l'identité. Le groupe $\text{Out}(W_n)$ étant engendré par l'union des stabilisateurs d'une $\{0\}$ -étoile et d'une F -étoile adjacente, ceci conclut la démonstration si $n \geq 5$. Le cas $n = 4$, qui présente un automorphisme extérieur exceptionnel, est traité dans la section 4.

Remarquons enfin qu'une extension du théorème 1.1 à des produits libres de copies d'un groupe fini n'est pas immédiate, ni même aux produits libres de copies d'un groupe fini cyclique. En effet, même si la proposition 1.3 s'étend aux produits libres de groupes finis cycliques, il convient dès lors d'étudier le groupe des automorphismes du stabilisateur d'une $\{0\}$ -étoile dans ce contexte, qui n'est cette fois plus trivial, ce qui nous semble nécessiter une nouvelle approche pour toute extension des théorèmes 1.1 et 1.2.

Remerciements Je remercie chaleureusement mes directeurs de thèse, Camille Horbez et Frédéric Paulin, pour leurs précieux conseils et pour leur lecture attentive des différentes versions du présent article.

2 Préliminaires

Nous rappelons tout d'abord la définition de l'outre-espace $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ introduit dans [Guirardel et Levitt 2007b]. Un point de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ est une classe d'homothétie de graphes métriques X de groupes, dont le groupe fondamental est W_n et qui sont munis d'un isomorphisme de groupes appelé *marquage* $\rho: W_n \rightarrow \pi_1(X)$ (pour un choix indifférent de point base) vérifiant :

- (1) Le graphe sous-jacent à X est un arbre fini, nous le noterons \bar{X} tout au long de l'article.
- (2) Tous les groupes d'arêtes sont triviaux.
- (3) Il y a exactement n sommets de groupes associés isomorphes à F .
- (4) Tous les autres sommets ont un groupe associé trivial.
- (5) Toute feuille de l'arbre sous-jacent a un groupe associé non trivial.
- (6) Si v est un sommet de groupe associé trivial, alors $\deg(v) \geq 3$.

Deux graphes métriques marqués (X, ρ) et (X', ρ') sont dans la même classe d'homothétie s'il existe une homothétie $f: X \rightarrow X'$ (ie un homéomorphisme multipliant toutes les longueurs des arêtes par un même scalaire strictement positif) telle que $f_* \circ \rho = \rho'$. On note $[X, \rho]$ la classe d'homothétie d'un tel graphe de groupes métrique marqué (X, ρ) . Si le marquage est sous-entendu, on notera \mathcal{X} la classe d'homothétie. Le groupe $\text{Aut}(W_n)$ agit par précomposition du marquage. Par ailleurs, pour tout $\alpha \in \text{Int}(W_n)$, et pour tout $\mathcal{X} \in \mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$, nous avons $\alpha(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. En effet, un automorphisme intérieur α de W_n agit par translation sur l'arbre de Bass–Serre associé à un graphe de groupes marqué X , ce qui implique que α préserve la

classe d'équivalence de X . De ce fait, l'action de $\text{Aut}(W_n)$ sur $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ induit une action de $\text{Out}(W_n)$ sur $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$.

La définition de l'*autre-espace* de W_n , noté $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$, est identique à celle de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ à ceci près que chaque graphe de groupes métrique considéré est muni d'un point base v . Le *marquage* est alors un isomorphisme de groupes $\rho: W_n \rightarrow \pi_1(X, v)$. Les homothéties considérées préservent les points bases. Le groupe $\text{Aut}(W_n)$ agit par précomposition du marquage.

Les ensembles $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ et $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ sont munis d'une topologie. Pour tout élément $[X, \rho] \in \mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$, soit (X, ρ) un représentant de cette classe d'équivalence tel que la somme des longueurs des arêtes du graphe \bar{X} soit égale à 1. Le graphe de groupes (X, ρ) définit alors un simplexe ouvert obtenu en faisant varier les longueurs des arêtes du graphe \bar{X} , de manière à ce que la somme des longueurs des arêtes soit toujours égale à 1. Une classe d'équivalence $[X', \rho'] \in \mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ définit une face de codimension 1 du simplexe associé à (X, ρ) si l'on peut obtenir (X', ρ') à partir de (X, ρ) en écrasant une arête de \bar{X} . La *topologie faible* sur $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ est alors définie de la manière suivante : un ensemble est ouvert si et seulement si son intersection avec chaque simplexe ouvert est ouverte.

Nous rappelons à présent la définition d'un rétract par déformation forte $\text{Out}(W_n)$ -équivariant de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$, appelé l'*épine de l'outre-espace*. Rappelons qu'un complexe simplicial \mathcal{C} est *de drapeaux* si, pour tout entier k , tout ensemble de k sommets deux à deux distincts et deux à deux adjacents de \mathcal{C} forme l'ensemble des sommets d'un simplexe de \mathcal{C} de dimension $k - 1$. L'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ est le complexe simplicial de drapeaux dont les sommets sont les simplexes ouverts associés à chaque classe d'équivalence $[X, \rho]$, et où deux sommets correspondant à des classes d'équivalence de graphes de groupes marqués $[X, \rho]$ et $[X', \rho']$ sont reliés par une arête si $[X, \rho]$ définit une face du simplexe associé à $[X', \rho']$ ou réciproquement. L'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ est définie de manière similaire. Il existe un plongement de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ dans $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ ayant pour image l'épine barycentrique de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$. Par la suite, nous identifierons l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ avec son image par ce plongement. De même, il existe un plongement de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ dans $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ ayant pour image l'épine barycentrique de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$.

Si X est un graphe de groupes, on note $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ le groupe des automorphismes du graphe \bar{X} . Si X est un graphe de groupes pointé, la notation $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ désigne le groupe des automorphismes du graphe pointé sous-jacent à X . Nous appellerons *{0}-étoile* la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ d'un graphe de groupes marqué dont le graphe sous-jacent est un arbre ayant n feuilles et $n + 1$ sommets et de longueur d'arêtes constante. Nous appellerons *F-étoile* la classe d'équivalence dans $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ d'un graphe de groupes marqué dont le graphe sous-jacent est un arbre ayant $n - 1$ feuilles et n sommets et de longueur d'arêtes constante. Les sommets correspondants dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ sont encore appelés *{0}-étoiles* et *F-étoiles*. Dans le cas de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$, les définitions des *{0}-étoiles* et des *F-étoiles* sont identiques à ceci près que l'on suppose également que le point base est le centre (l'unique sommet qui n'est pas une feuille) du graphe.

On fixe désormais une partie génératrice standard $\{x_1, \dots, x_n\}$ de W_n .

Le groupe $\text{Aut}(W_n)$ (et donc $\text{Out}(W_n)$) est de type fini. Nous décrivons maintenant une partie génératrice finie. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on note $\tau_i: W_n \rightarrow W_n$ l'automorphisme envoyant x_i sur x_{i+1} , x_{i+1} sur x_i et qui fixe tous les autres générateurs. Pour tous les $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, on note $\sigma_{i,j}: W_n \rightarrow W_n$ l'automorphisme qui envoie x_i sur $x_j x_i x_j$ et qui fixe tous les autres générateurs. La proposition suivante est due à Mühlherr (voir également [Fouxe-Rabinovitch 1941; Gilbert 1987]).

Proposition 2.1 [Mühlherr 1997, Theorem B] *Le groupe $\text{Aut}(W_n)$ est engendré par $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ et par $\sigma_{1,2}$.*

Si α est un élément de $\text{Aut}(W_n)$, sa classe d'automorphismes extérieurs sera notée $[\alpha]$. Soit $p: \text{Aut}(W_n) \rightarrow \text{Out}(W_n)$ la projection canonique. On note $\tilde{A}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$ et $A_n = p(\tilde{A}_n)$. Les groupes \tilde{A}_n et A_n sont isomorphes au groupe symétrique \mathfrak{S}_n . On note $\tilde{U}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-2}, \sigma_{1,n} \rangle$ et $U_n = p(\tilde{U}_n)$. On voit que \tilde{U}_n est isomorphe au produit semi-direct $F^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$, alors que U_n est isomorphe au produit semi-direct $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$, où \mathfrak{S}_{n-1} agit dans les deux cas par permutation des facteurs, en considérant F^{n-2} comme le quotient de F^{n-1} par le sous-groupe F diagonal. Soient $\tilde{B}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-2} \rangle$ et $B_n = p(\tilde{B}_n)$. Les groupes \tilde{B}_n et B_n sont isomorphes à \mathfrak{S}_{n-1} .

Nous traitons à présent le cas où $n = 3$. Soit $\epsilon: W_3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme envoyant, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, l'élément x_i sur 1. Mühlherr [1997, Theorem A] a montré que $\ker(\epsilon)$ est un sous-groupe caractéristique de W_3 . De plus, $\ker(\epsilon)$ est un groupe libre à deux générateurs, librement engendré par $x_1 x_2$ et $x_2 x_3$. Ceci induit un morphisme $\rho: \text{Aut}(W_3) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_2)$, qui est en fait un isomorphisme (cf [Varghese 2021, Lemma 2.3]).

Proposition 2.2 *Le morphisme $\rho: \text{Aut}(W_3) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ induit un isomorphisme entre $\text{Out}(W_3)$ et $\mathbb{PGL}(2, \mathbb{Z})$.*

Démonstration Soient a et b les générateurs de \mathbb{F}_2 . On remarque tout d'abord que $\text{Int}(\mathbb{F}_2) \subseteq \rho(\text{Int}(W_3))$. Donc le noyau du morphisme surjectif $\text{Aut}(W_3) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{F}_2)$ est inclus dans $\text{Int}(W_3)$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, soit $\text{ad}_{x_i} \in \text{Aut}(W_3)$ la conjugaison globale par x_i . Un calcul immédiat montre que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\rho(\text{ad}_{x_i})$ est dans la classe d'automorphisme extérieur du morphisme $\iota: \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ envoyant a sur a^{-1} et b sur b^{-1} . De ce fait, puisque le sous-groupe $\langle [\iota] \rangle$ est distingué dans $\text{Out}(\mathbb{F}_2)$, le morphisme ρ induit un isomorphisme entre $\text{Out}(W_3)$ et $\text{Out}(\mathbb{F}_2)/\langle [\iota] \rangle$. Comme ι est envoyé par le morphisme d'abélianisation sur $-\text{Id} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$, on voit que $\text{Out}(W_3)$ est isomorphe à $\mathbb{PGL}(2, \mathbb{Z})$. \square

Nous allons démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2 en étudiant les stabilisateurs des $\{0\}$ -étoiles et des F -étoiles sous l'action de $\text{Out}(W_n)$ et $\text{Aut}(W_n)$. Pour cela, nous utiliserons les résultats suivants, dus respectivement à Hensel et Kielak et à Guirardel et Levitt, qui donnent des informations sur les points fixes de sous-groupes de $\text{Out}(W_n)$.

Proposition 2.3 [Hensel et Kielak 2018, Corollary 6.1] *Soient $n \geq 1$ un entier et H un sous-groupe fini de $\text{Out}(W_n)$. Alors H fixe un point de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$.*

Corollaire 2.4 Soient $n \geq 1$ un entier et H un sous-groupe fini de $\text{Aut}(W_n)$. Alors H fixe un point de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$.

Démonstration Soit $p: \text{Aut}(W_n) \rightarrow \text{Out}(W_n)$ la projection canonique. Alors $p(H)$ est un sous-groupe fini de $\text{Out}(W_n)$, donc par la proposition 2.3, $p(H)$ fixe un point \mathcal{X} de l'outre-espace. Soit X un représentant de \mathcal{X} . Comme tout automorphisme intérieur agit sur X , et que $p(H)$ agit également sur X , on en déduit que H agit sur X . Étant donné que H est fini et que \bar{X} est un arbre, on voit que H fixe un point v de \bar{X} . Donc la classe d'homothétie du graphe de groupes métrique marqué pointé (X, v) est fixée par H . \square

Proposition 2.5 [Guirardel et Levitt 2007a, Theorem 8.3] Soit $n \geq 2$ un entier. Si H est un sous-groupe de type fini de $\text{Out}(W_n)$ (resp. $\text{Aut}(W_n)$) fixant un point de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ (resp. $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$), alors l'ensemble des points fixes de H est contractile pour la topologie faible. \square

On note $\text{Fix}_{\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)}(G)$ l'ensemble des points fixes d'un sous-groupe G de $\text{Out}(W_n)$ dans $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ (ou $\text{Fix}(G)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté). On note de plus $\text{Fix}_{K_n}(G)$ l'ensemble des points fixes de G contenus dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$. Puisque l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ est un rétract par déformation forte $\text{Out}(W_n)$ -équivariant de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$, nous déduisons de la proposition 2.5 le résultat suivant.

Corollaire 2.6 Soit $n \geq 2$ un entier. Si H est un sous-groupe de type fini de $\text{Out}(W_n)$ fixant un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$, alors l'ensemble $\text{Fix}(H)$ des points fixes de H dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ est connexe pour la topologie faible.

Soit \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$. On note X un représentant de \mathcal{X} et T l'arbre de Bass–Serre associé à X . Nous définissons à présent un morphisme de groupes

$$\Phi: \text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X).$$

Soient $[\alpha] \in \text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X})$ et $\alpha \in \text{Aut}(W_n)$ un représentant de $[\alpha]$. Il existe un automorphisme $\tilde{H}_\alpha \in \text{Aut}(T)$ tel que $\alpha(g)\tilde{H}_\alpha(x) = \tilde{H}_\alpha(gx)$ pour tout $x \in T$ et pour tout $g \in W_n$. L'automorphisme \tilde{H}_α induit un automorphisme $H_\alpha \in \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$, et l'application $\alpha \mapsto H_\alpha$ passe au quotient pour donner un morphisme

$$\Phi: \text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X).$$

Nous pouvons à présent démontrer un résultat identique au corollaire 2.6 dans le cas de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$.

Corollaire 2.7 Soit $n \geq 2$ un entier. Si H est un sous-groupe fini de $\text{Aut}(W_n)$ fixant un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$, alors l'ensemble $\text{Fix}(H)$ des points fixes de H dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ est connexe pour la topologie faible.

Démonstration Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux points de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ fixés par H . Soit $p_1: \mathbb{P}\mathcal{A}(W_n) \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ le morphisme canonique d'oubli du point base. On rappelle que $p: \text{Aut}(W_n) \rightarrow \text{Out}(W_n)$ est la projection canonique. Alors $p(H)$ fixe $p_1(\mathcal{X})$ et $p_1(\mathcal{Y})$, donc par le corollaire 2.6 il existe dans $\text{Fix}_{K_n}(p(H))$ un chemin continu P de $p_1(\mathcal{X})$ vers $p_1(\mathcal{Y})$. Soient $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ les sommets de K_n consécutifs dans P (on suppose $p_1(\mathcal{X}) = \mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_n = p_1(\mathcal{Y})$) tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, X_i et X_{i+1}

sont reliés par une arête dans K_n . Soit X_1 un représentant de \mathcal{X}_1 et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, soit X_i un représentant de \mathcal{X}_i obtenu en écrasant ou en éclatant une forêt de X_{i-1} . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, comme tout automorphisme intérieur agit trivialement sur X_i , et puisque $p(H)$ agit également sur X_i , on en déduit que H agit sur X_i . De plus, étant donné que H est fini et que le graphe \bar{X}_i est un arbre, on voit que H fixe un point v_i de \bar{X}_i . Pour tout i , soit $\tilde{\mathcal{X}}_i$ la classe d'équivalence du graphe métrique marqué pointé (X_i, v_i) (on suppose que $\tilde{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X}$ et $\tilde{\mathcal{X}}_n = \mathcal{Y}$). Alors $\tilde{\mathcal{X}}_i$ est fixé par H .

Nous construisons à présent pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ un chemin continu inclus dans l'ensemble des points fixes de H dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ entre $\tilde{\mathcal{X}}_i$ et $\tilde{\mathcal{X}}_{i+1}$, ce qui conclura. La construction étant symétrique, nous pouvons supposer, quitte à changer les représentants X_i et X_{i+1} , que X_{i+1} est obtenu à partir de X_i en écrasant une forêt \mathcal{F} . Soient Δ le simplexe ouvert dans $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ associé à (X_i, v_i) et e l'arête de l'épine barycentrique de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ reliant $\tilde{\mathcal{X}}_i$ et $\tilde{\mathcal{X}}_{i+1}$. Pour toute arête f de \mathcal{F} , soit ℓ_f la longueur de f . Pour tout $t \in [0, 1]$, soient X_i^t le graphe de groupes métrique obtenu à partir de X_i en donnant à toute arête $f \in \mathcal{F}$ la longueur $(1-t)\ell_f$, et $\text{pr}_t: X_i \rightarrow X_i^t$ la projection canonique. On observe que $X_i^0 = X_i$ et que $X_i^1 = X_{i+1}$.

Puisque H stabilise X_i et X_{i+1} , on voit que H stabilise la forêt F . Donc, pour tout $t \in [0, 1]$, le groupe H stabilise X_i^t . Puisque H fixe le sommet v_i de \bar{X}_i , il fixe également, pour tout $t \in [0, 1]$, le sommet $\text{pr}_t(v_i)$. Ceci induit un chemin continu de $\tilde{\mathcal{X}}_i$ vers la classe d'équivalence dans K_n de $(X_{i+1}, \text{pr}_1(v_i))$. Si $\text{pr}_1(v_i) \neq v_{i+1}$, alors, puisque le graphe \bar{X}_{i+1} est un arbre, H fixe l'unique arc dans \bar{X}_{i+1} reliant $\text{pr}_1(v_i)$ et v_{i+1} . Ceci induit alors un chemin continu contenu dans l'ensemble des points fixes de H dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ entre la classe d'équivalence dans K_n de $(X_{i+1}, \text{pr}_1(v_i))$ et $\tilde{\mathcal{X}}_{i+1}$, ce qui conclut. \square

Soient \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ et X un représentant de \mathcal{X} . On note $\Phi: \text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ le morphisme naturel. Donnons maintenant une description de $\ker(\Phi)$. Soit $[X, \rho]$ un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$. On note (X, ρ) un représentant de $[X, \rho]$. Soit e une arête de \bar{X} reliant le sommet $v = o(e)$ au sommet $w = t(e)$. Soit $z \in G_v$ un élément du groupe associé au sommet v , et \bar{z} son antécédent par ρ . Nous définissons à présent le *twist par z autour de e* . Soit G_u le groupe associé à un sommet u . Le twist par z autour de e , noté D_z , est l'automorphisme de W_n , bien défini modulo conjugaison, qui est égal à l'identité sur $\rho^{-1}(G_u)$ si u est dans la même composante connexe de \bar{X} privé de l'intérieur de e que v , et qui à $x \in \rho^{-1}(G_u)$ associe $\bar{z}x\bar{z}^{-1}$ si u n'est pas dans la même composante connexe que v . Nous avons le résultat suivant, dû à Levitt.

Proposition 2.8 [Levitt 2005, Propositions 2.2 and 3.1] *Soit $n \geq 2$ un entier. Soient \mathcal{X} un point de l'épine de l'outre-espace $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ et X un représentant de \mathcal{X} . Soient v_1, \dots, v_n les sommets du graphe \bar{X} de groupe associé isomorphe à F et soit n_i le degré de v_i pour $i = 1, \dots, n$. Le noyau du morphisme $\Phi: \text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ (noté $\text{Out}_0(W_n)$ dans [Levitt 2005]) est isomorphe à $\prod_{i=1}^n F^{n_i-1}$, et il est engendré par les twists autour des arêtes dont l'origine appartient à $\{v_1, \dots, v_n\}$ et n'est pas une feuille.*

Remarque 2.9 Dans le cas où $\mathcal{X} \in \mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$, le noyau est engendré par les twists autour des arêtes e dont l'origine $o(e)$ appartient à $\{v_1, \dots, v_n\}$ et n'est pas une feuille, et telles que, si $o(e)$ est distinct du point base v_* , ces arêtes ne soient pas contenues dans l'unique chemin reliant $o(e)$ à v_* . En particulier, si le groupe associé à v_* est trivial et si n_i est le degré de v_i pour $i = 1, \dots, n$, alors le noyau est isomorphe à $\prod_{i=1}^n F^{n_i-1}$. Si le groupe associé à v_* est non trivial, et si on suppose $v_* = v_n$, alors le noyau est isomorphe à $(\prod_{i=1}^{n-1} F^{n_i-1}) \times F^{n_n}$.

3 Stabilisateurs des $\{0\}$ -étoiles et des F -étoiles

Dans cette section nous donnons une caractérisation des stabilisateurs de $\{0\}$ -étoiles et de F -étoiles. Nous présentons les démonstrations dans le cas de $\text{Out}(W_n)$, les différences avec $\text{Aut}(W_n)$ étant présentées dans des remarques suivant les démonstrations pour $\text{Out}(W_n)$.

3.1 Stabilisateurs des $\{0\}$ -étoiles

Nous étudions tout d'abord les stabilisateurs des $\{0\}$ -étoiles. Nous démontrons dans cette section la proposition suivante.

Proposition 3.1 Soient $n \geq 5$ un entier et G un sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à \mathfrak{S}_n . Alors G est le stabilisateur dans l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$ d'une unique $\{0\}$ -étoile.

Afin de démontrer la proposition 3.1, nous avons besoin d'une étude des stabilisateurs de sommets de l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$ dont les graphes sous-jacents possèdent exactement n feuilles.

Lemme 3.2 Soit $n \geq 4$ un entier. Soient G un sous-groupe fini de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à \mathfrak{S}_n , et \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$ fixé par G . On note X un représentant de \mathcal{X} . Si le nombre de feuilles de \bar{X} est n , alors \mathcal{X} est une $\{0\}$ -étoile.

Démonstration Soit v un sommet de \bar{X} qui n'est pas une feuille et qui soit à distance maximale du centre¹ de \bar{X} .

Affirmation Si $m = \deg(v)$, alors v est adjacent à au moins $m - 1$ feuilles de \bar{X} .

Démonstration L'hypothèse de maximalité sur v implique qu'il y a au plus un sommet adjacent à v qui n'est pas une feuille, car sinon nous pourrions trouver un sommet w adjacent à v qui ne serait pas une feuille et qui serait à distance strictement plus grande du centre que v . \triangleleft

Maintenant, le groupe associé à v est trivial car \bar{X} possède exactement n sommets de groupes associés non triviaux, et ces sommets sont tous des feuilles car \bar{X} possède n feuilles. De ce fait, $\deg(v) \geq 3$ et v est adjacent à au moins deux feuilles, notées v_1 et v_2 .

¹Rappelons que le centre d'un arbre métrique compact non vide est l'unique milieu d'un segment de longueur maximale.

Soient L l'ensemble des feuilles de \bar{X} et w une feuille de \bar{X} distincte de v_1 et v_2 . Puisque les seuls sommets de \bar{X} dont les groupes associés sont non triviaux sont des feuilles, la proposition 2.8 montre que le morphisme naturel $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est injectif. Ainsi, étant donné que le groupe G est isomorphe à \mathfrak{S}_n , et que \bar{X} possède n feuilles, le morphisme naturel $\text{Aut}_{\text{gr}}(X) \hookrightarrow \text{Bij}(L)$ est un isomorphisme. Il existe donc un automorphisme de \bar{X} envoyant v_1 sur w et fixant v_2 . De ce fait, w est adjacent à v . Ainsi, v est adjacent à toutes les feuilles de \bar{X} . Puisque le groupe $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à $\text{Bij}(L)$, toutes les arêtes de \bar{X} ont même longueur. On conclut que \mathcal{X} est une $\{0\}$ -étoile. \square

Remarque 3.3 Le résultat est identique dans le cas de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$. En effet, soit G un sous-groupe fini de $\text{Aut}(W_n)$ isomorphe à \mathfrak{S}_n , et \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ fixé par G . On note X un représentant de \mathcal{X} . Supposons que \bar{X} possède n feuilles. Alors la remarque 2.9 donne que le noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est un sous-groupe distingué de G d'ordre au plus 2. Comme G est isomorphe à \mathfrak{S}_n et que $n \geq 4$, le morphisme est injectif. La même démonstration que le lemme 3.2 montre alors que X possède n feuilles et $n + 1$ sommets. Il reste à montrer que le point base est le centre de \bar{X} . Mais ceci provient du fait que le groupe G est isomorphe à $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ qui lui-même est isomorphe à $\text{Bij}(L)$. Ainsi, nécessairement, le point base est le centre de \bar{X} . Donc \mathcal{X} est une $\{0\}$ -étoile.

Démonstration de la proposition 3.1 Puisque G est fini, d'après la proposition 2.3, il existe un point \mathcal{X} de l'épine de l'outre-espace qui est fixé par G . Soit X un représentant de \mathcal{X} . D'après la proposition 2.8, il existe un entier k tel que le noyau de l'application naturelle $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ soit isomorphe à $F^k \cap G$.

Or $F^k \cap G$ est un 2-sous-groupe distingué de $G \simeq \mathfrak{S}_n$. Donc, comme $n \geq 5$, un tel sous-groupe est trivial. De ce fait, G s'injecte dans $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$. Or tout automorphisme d'un arbre est entièrement déterminé par la permutation qu'il induit sur l'ensemble des feuilles. Ainsi, si L est l'ensemble des feuilles de \bar{X} ,

$$G \hookrightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X) \hookrightarrow \text{Bij}(L).$$

Or, les représentants des éléments de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ possèdent au plus n sommets de groupes non triviaux et toutes les feuilles possèdent des groupes associés non triviaux. Donc $|L| \leq n$. Donc, comme G s'injecte dans $\text{Bij}(L)$ et que G est isomorphe à \mathfrak{S}_n , on voit que G est isomorphe à $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ et que $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à $\text{Bij}(L)$. De ce fait, \bar{X} possède n feuilles. Par le lemme 3.2, \mathcal{X} est une $\{0\}$ -étoile.

Montrons maintenant l'unicité. Puisque l'ensemble des $\{0\}$ -étoiles est discret dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$, par le corollaire 2.6, on conclut que G fixe une unique $\{0\}$ -étoile dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$. \square

Remarque 3.4 Dans le cas de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$, le résultat de la proposition 3.1 est vrai pour $n \geq 4$. En effet, dans le cas où $n \geq 5$, la démonstration est identique à celle de la proposition 3.1 en utilisant cette fois la remarque 3.3.

Dans le cas où $n = 4$, soit $\mathcal{X} \in \mathbb{P}\mathcal{A}(W_4)$ un point fixé par un sous-groupe G de $\text{Aut}(W_n)$ isomorphe à \mathfrak{S}_n . On note X un représentant de \mathcal{X} et v_* le point base de \bar{X} . Soit H le noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$.

Supposons par l'absurde que H ne soit pas trivial. Alors, par la remarque 2.9, le groupe H est un 2-groupe. Comme le seul 2-sous-groupe distingué de \mathfrak{S}_4 est le groupe de Klein, le groupe H est isomorphe à F^2 . Nous distinguons différents cas, selon le fait que le groupe associé à v_* soit trivial ou non et selon le nombre de sommets qui ne sont pas des feuilles et qui ont un groupe associé non trivial. On remarque immédiatement que, puisque tout arbre possède au moins deux feuilles, le nombre de sommets qui ne sont pas des feuilles et de groupes associés non triviaux est au plus 2.

Supposons que \bar{X} contienne deux sommets qui ne soient pas des feuilles et dont les groupes associés sont isomorphes à F et que le groupe associé à v_* soit trivial.

L'hypothèse sur v_* implique que $\deg(v_*) \geq 3$. Comme chaque composante connexe de $\bar{X} - \{v_*\}$ contient au moins une feuille, \bar{X} contiendrait cinq sommets de groupes associés non triviaux. Ceci contredit le fait qu'il y a exactement quatre sommets dans le graphe de groupes associés non triviaux.

Supposons que \bar{X} contienne deux sommets qui ne sont pas des feuilles et dont les groupes associés sont isomorphes à F et que le groupe associé à v_* ne soit pas trivial.

Alors la description du noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ donné dans la remarque 2.9 donne que le cardinal du noyau est au moins 8, ce qui contredit le fait que H est de cardinal 4.

Supposons que \bar{X} contienne un seul sommet, noté w , de groupe associé non trivial et qui ne soit pas une feuille et que le groupe associé à v_* soit trivial. Alors $\deg(v_*) \geq 3$. Comme chaque composante connexe de $\bar{X} - \{v_*\}$ contient au moins une feuille, et qu'il existe un sommet de groupe associé non trivial et qui ne soit pas une feuille, $\deg(v_*) = 3$. De plus, puisqu'il y a exactement quatre sommets dans le graphe de groupes associés non triviaux, chaque composante connexe de $\bar{X} - \{v_*\}$ contient exactement une feuille. Donc v_* est relié à exactement deux feuilles et w est relié à une seule feuille et à v_* . Or le cardinal du groupe des automorphismes d'un tel graphe est égal à 2. Comme le noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est de cardinal 4, ceci contredit le fait que G est isomorphe à \mathfrak{S}_4 .

Supposons que \bar{X} contienne un seul sommet, noté w , de groupe associé non trivial et qui ne soit pas une feuille. Si v_* est une feuille, alors le graphe possède exactement trois feuilles, dont l'une est le point base. De ce fait, comme tout automorphisme de \bar{X} est induit par son action sur les feuilles, le groupe des automorphismes d'un tel graphe pointé est de cardinal 2. Comme le noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est de cardinal 4, ceci contredit le fait que G est isomorphe à \mathfrak{S}_4 .

Supposons alors que le point base v_* ne soit pas une feuille. Par les cas précédents, $v_* = w$. Comme le nombre de sommets de groupe associé non trivial est exactement 4, et que tout sommet de groupe associé trivial est de degré au moins 3, le graphe \bar{X} contient au plus un sommet de groupe associé trivial. Le cas où le nombre de sommets de groupe associé trivial est égal à 1 n'est pas possible car alors le cardinal du groupe des automorphismes d'un tel graphe est égal à 2, contredisant le fait que le noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est de cardinal 4 et que G est isomorphe à \mathfrak{S}_4 .

Dans le cas où le nombre de sommets de groupe associé trivial est nul, on voit que \mathcal{X} est une F -étoile. Or, par la remarque 2.9, le cardinal du noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est égal à 8, d'où une contradiction.

En conclusion, le morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est également injectif dans le cas où \mathcal{X} appartient à $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_4)$ et $n = 4$. La suite de la démonstration est alors identique à la proposition 3.1.

Remarque 3.5 La proposition 3.1 reste vraie si l'on remplace F par un groupe fini, dès lors que le groupe des automorphismes de ce groupe fini ne contient pas de sous-groupe isomorphe au groupe alterné.

3.2 Stabilisateurs des F -étoiles

Nous démontrons à présent une caractérisation des stabilisateurs de F -étoiles.

Proposition 3.6 Soit $n \geq 5$. Soit G un sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$. Alors G est le stabilisateur d'une unique F -étoile.

Le démonstration de la proposition 3.6 passe par l'étude des sous-groupes d'ordre maximaux de $\text{Out}(W_n)$. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.7 Soient $n \geq 4$ un entier et \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$. On note X un représentant de \mathcal{X} . Soit k l'entier tel que le noyau du morphisme naturel

$$\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$$

soit isomorphe à F^k . Alors $k \leq n - 2$. Par ailleurs, $k = n - 2$ si et seulement si l'ensemble $V\bar{X}$ des sommets de \bar{X} est de cardinal n .

Démonstration Supposons que $|V\bar{X}| > n$. Soient v un sommet de groupe associé trivial et e une arête de X reliant v à un sommet w . Une telle arête existe car \bar{X} est connexe et le nombre de sommets de \bar{X} de groupe non trivial est égal à n .

Affirmation Soient Y le graphe de groupes marqué obtenu à partir de X en contractant l'arête e et \mathcal{Y} sa classe d'équivalence dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$. Alors le noyau du morphisme naturel $\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{Y}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(Y)$ est isomorphe à F^l , avec $l = k$ si le groupe associé à w est trivial, et $l \geq k + 1$ sinon.

Démonstration Si le groupe associé à w est trivial, alors contracter l'arête e ne modifie pas le degré des sommets dont le groupe associé est non trivial. Donc, dans ce cas, $k = l$. Supposons maintenant que le groupe associé à w ne soit pas trivial. Notons $\bar{v}\bar{w}$ le sommet obtenu en contractant e . Le groupe associé à $\bar{v}\bar{w}$ est non trivial. Alors, puisque, par hypothèse, $\deg(v) \geq 3$, nous avons

$$\deg(\bar{v}\bar{w}) = \deg(v) + \deg(w) - 2 \geq \deg(w) + 1.$$

Ainsi, dans ce cas, $l \geq k + 1$. ◁

De ce fait, si $|V\bar{X}| > n$, il existe une arête reliant un sommet de groupe associé trivial et un sommet de groupe associé non trivial. Par l'affirmation précédente, l'entier k associé au morphisme $\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ n'est pas maximal.

Ainsi, pour calculer la borne maximale de k , nous pouvons supposer que \bar{X} possède n sommets, tous de groupe associé non trivial. Donc,

$$\sum_{v \in V\bar{X}} \text{deg}(v) = 2|E\bar{X}| = 2n - 2,$$

la dernière égalité provenant du fait que \bar{X} soit un arbre. Ainsi,

$$k = \sum_{v \in V\bar{X}} (\text{deg}(v) - 1) = \sum_{v \in V\bar{X}} \text{deg}(v) - n = 2n - 2 - n = n - 2.$$

Donc, $k \leq n - 2$, et si $|V\bar{X}| = n$, alors $k = n - 2$.

Supposons maintenant que $k = n - 2$. Par l'affirmation précédente, la procédure de contraction présentée fait croître strictement k lorsque l'on contracte une arête reliant un sommet de groupe associé trivial et un sommet de groupe associé non trivial. Donc \bar{X} ne peut pas contenir de sommets ayant un groupe associé trivial. On conclut que le cardinal de $V\bar{X}$ est égal à n . \square

Remarque 3.8 Dans le cas de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$, soit \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$. On note X un représentant de \mathcal{X} . Soit k l'entier tel que le noyau du morphisme naturel $\text{Stab}_{\text{Aut}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ soit isomorphe à F^k . Alors une démonstration identique au lemme 3.7 montre que $k \leq n - 1$ avec égalité si et seulement si $|V\bar{X}| = n$.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant concernant les stabilisateurs de F -étoiles dans $\text{Out}(W_n)$.

- Proposition 3.9** (1) Soit $n \geq 4$ un entier. Le cardinal maximal d'un sous-groupe fini de $\text{Out}(W_n)$ est $2^{n-2}(n-1)!$.
- (2) Supposons $n \geq 5$. Soient G un sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$, et \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ fixé par G . On note X un représentant de \mathcal{X} . Si \bar{X} possède n feuilles, alors $|G| < 2^{n-2}(n-1)!$.
- (3) Supposons $n \geq 4$. Soient G un sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$ et \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$ fixé par G . On note X un représentant de \mathcal{X} . Si le nombre de feuilles de \bar{X} est $n - 1$, alors \mathcal{X} est une F -étoile.

Démonstration Si \mathcal{X} est un élément de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{C}(W_n)$, nous noterons X un représentant de \mathcal{X} . Nous noterons également L l'ensemble des feuilles de \bar{X} . Puisque \bar{X} est un arbre, tout automorphisme de \bar{X} est entièrement déterminé par son action sur les feuilles. Donc le morphisme de restriction de $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ dans $\text{Bij}(L)$ est injectif.

Montrons l'assertion (1). Puisque tout sous-groupe fini de $\text{Out}(W_n)$ fixe un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$ par la proposition 2.3, il suffit de montrer que, pour \mathcal{X} un point de l'épine de l'outre-espace, $|\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X})| \leq 2^{n-2}(n-1)!$. D'après la proposition 2.8, il existe un entier k tel que le noyau du morphisme naturel $\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ soit isomorphe à F^k . De ce fait, $|\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X})| \leq 2^k |\text{Aut}_{\text{gr}}(X)|$.

Nous distinguons deux cas, selon le cardinal de L .

- Supposons que $|L| \leq n-1$. Alors $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$, qui s'injecte dans $\text{Bij}(L)$, s'injecte dans \mathfrak{S}_{n-1} . Ainsi,

$$|\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X})| \leq 2^k |\text{Aut}_{\text{gr}}(X)| \leq 2^k (n-1)! \leq 2^{n-2}(n-1)!,$$

où la dernière inégalité découle du lemme 3.7.

- Supposons que $|L| = n$. Alors tous les sommets ayant des groupes associés non triviaux sont des feuilles. Ainsi, $k = 0$ par la proposition 2.8. Puisque $\text{Bij}(L)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_n , nous avons

$$|\text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X})| \leq |\text{Aut}_{\text{gr}}(X)| \leq n!.$$

Or puisque $n \geq 4$, nous avons $n \leq 2^{n-2}$, donc $n! \leq 2^{n-2}(n-1)!$, ce qui conclut.

Donc, pour tout sous-groupe fini G de $\text{Out}(W_n)$, l'ordre de G est au plus $2^{n-2}(n-1)!$. Cette borne est atteinte par le groupe $U_n = \langle [\tau_1], \dots, [\tau_{n-2}], [\sigma_{1,n}] \rangle$, qui est isomorphe au produit semi-direct $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$.

Soient $n \geq 5$ et G , \mathcal{X} et X comme dans l'énoncé de l'assertion (2). Par la proposition 2.8, il existe un entier k tel que le noyau du morphisme naturel $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ soit isomorphe à $F^k \cap G$. Puisque \bar{X} possède n feuilles, par la proposition 2.8, l'entier k est nul. De ce fait, le groupe G s'injecte dans $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$, qui s'injecte dans $\text{Bij}(L)$. Donc $|G| \leq n!$. Or $2^{n-2}(n-1)! \leq n!$ implique que $n \leq 4$. D'où $|G| < 2^{n-2}(n-1)!$.

Soient $n \geq 4$ et G , \mathcal{X} et X comme dans l'énoncé de (3). Comme G est de cardinal maximal parmi les sous-groupes finis de $\text{Out}(W_n)$, nous avons $G = \text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X})$. Donc, par la proposition 2.8, il existe un entier k tel que le noyau du morphisme naturel $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ soit isomorphe à F^k . Ainsi, puisque $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ s'injecte dans $\text{Bij}(L)$ et que ce dernier est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} , on voit que $|G| \leq 2^k (n-1)!$. Comme $k \leq n-2$ par le lemme 3.7, et puisque $|G| = 2^{n-2}(n-1)!$, on a nécessairement $k = n-2$. Le lemme 3.7 donne alors que \bar{X} possède exactement n sommets. De ce fait, \bar{X} possède $n-1$ feuilles et n sommets. Par ailleurs, on voit également que $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à $\text{Bij}(L)$. Ainsi, toutes les arêtes de \bar{X} ont la même longueur. Donc \mathcal{X} est une F -étoile. \square

Démonstration de la proposition 3.6 Supposons que $n \geq 5$ et que G soit un sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$. Par la proposition 2.3, le groupe G fixe un point \mathcal{X} de l'épine de l'outre-espace. Comme G est de cardinal maximal parmi les sous-groupes finis de $\text{Out}(W_n)$, nous avons $G = \text{Stab}_{\text{Out}(W_n)}(\mathcal{X})$. Donc, par la proposition 2.8, il existe un entier k tel que le noyau du morphisme naturel $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ soit isomorphe à F^k .

Affirmation L'arbre \bar{X} possède exactement $n - 1$ feuilles.

Démonstration L'assertion (2) de la proposition 3.9 dit que \bar{X} possède au plus $n - 1$ feuilles. Nous avons

$$|G| = 2^{n-2}(n-1)! \leq 2^k |\text{Aut}_{\text{gr}}(X)| \leq 2^{n-2} |\text{Aut}_{\text{gr}}(X)|$$

où la dernière égalité provient du lemme 3.7. Donc $|\text{Aut}_{\text{gr}}(X)| \geq (n-1)!$. Ainsi, puisque \bar{X} possède au plus $n - 1$ feuilles, le groupe $\text{Bij}(L)$ dans lequel s'injecte $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} . Donc le cardinal de L est $n - 1$. \triangleleft

De ce fait, \bar{X} possède $n - 1$ feuilles. Par l'assertion (3) de la proposition 3.9, \mathcal{X} est une F -étoile dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$. Par le corollaire 2.6, l'ensemble des points fixes de G est connexe. Puisque l'ensemble des F -étoiles est discret dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$, on conclut que G fixe une unique F -étoile dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$. \square

Remarque 3.10 Dans le cas de $\text{Aut}(W_n)$, soient G un sous groupe fini de $\text{Aut}(W_n)$ et \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ fixé par G . On note X un représentant de \mathcal{X} .

(1) Si $n \geq 4$, le cardinal de G est plus petit que $2^{n-1}(n-1)!$.

La démonstration pour le cas où le nombre de feuilles de \bar{X} est plus petit que $n - 1$ est identique à celle de la proposition 3.9(1) en utilisant cette fois la remarque 3.8. Dans le cas où le nombre de feuilles est égal à n , le noyau du morphisme naturel $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est de cardinal plus petit que 2 par la remarque 2.9, donc $|G| \leq 2n! \leq 2^{n-1}(n-1)!$ car $n \geq 4$.

(2) Si $n \geq 5$ et si \bar{X} possède n feuilles, alors $|G| < 2^{n-1}(n-1)!$.

En effet, par la remarque 2.9, le cardinal du noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est plus petit que 2, donc $|G| \leq 2n! < 2^{n-1}(n-1)!$ car $n \geq 5$.

(3) Si $n \geq 4$, si G est isomorphe à $F^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$ et si \bar{X} possède au plus $n - 1$ feuilles, alors \mathcal{X} est une F -étoile.

En effet, une démonstration identique à celle de la proposition 3.9(3) montre que \bar{X} possède $n - 1$ feuilles et n sommets. Montrons alors que le point base est le centre de X . Ceci découle du fait que le groupe des automorphismes de \bar{X} est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} , car le noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à F^{n-1} et que G est isomorphe à $F^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$.

(4) Si $n \geq 4$ et si G est isomorphe à $F^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$, tout point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ fixé par G est une F -étoile.

En effet, l'existence d'une F -étoile fixée par G lorsque $n \geq 5$ se déduit des faits précédents.

Dans le cas où $n = 4$, soit \mathcal{X} un point de l'épine de l'outre-espace fixé par G , et soit X un représentant de \mathcal{X} . On note L l'ensemble des feuilles de \bar{X} . Si \bar{X} possède au plus $n - 1$ feuilles, alors, par le fait précédent, \mathcal{X} est une F -étoile. Supposons que \bar{X} possède exactement n feuilles. Alors la remarque 2.9

montre que le noyau du morphisme naturel $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est de cardinal au plus 2. Il ne peut pas être injectif, car le cardinal de G est égal à 48 alors que le groupe $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ s'injecte dans $\text{Bij}(L)$ de cardinal égal à 24. Donc le noyau du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est de cardinal égal à 2. Ainsi, le point base de \bar{X} est une feuille. Or, puisque $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ s'injecte dans $\text{Bij}(L)$ et que l'image du morphisme $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est de cardinal égal à 24, on voit que $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à $\text{Bij}(L)$. Ceci contredit le fait que le point base de \bar{X} est une feuille. En conclusion, \bar{X} possède au plus $n - 1$ feuilles. Donc \mathcal{X} est une F -étoile. La démonstration de l'unicité de la F -étoile fixée par G est alors identique à celle de la démonstration de la proposition 3.9(4).

Remarque 3.11 La proposition 3.6 reste vraie si l'on remplace F par un groupe cyclique fini.

3.3 Intersection des stabilisateurs d'une $\{0\}$ -étoile et d'une F -étoile

Nous étudions dans cette section l'intersection d'un stabilisateur d'une $\{0\}$ -étoile et d'un stabilisateur d'une F -étoile. Le résultat central de cette section (proposition 3.13) montre que l'intersection des stabilisateurs d'une $\{0\}$ -étoile et d'une F -étoile fixe une unique classe d'équivalence de $\{0\}$ -étoiles et une unique classe d'équivalence de F -étoiles.

Lemme 3.12 Soit n un entier.

- (1) Supposons que $n \geq 5$. Soit G un sous-groupe de \mathfrak{S}_n isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} . Il existe un automorphisme de \mathfrak{S}_n envoyant G sur $\{f \in \text{Bij}(\{1, \dots, n\}) : f(n) = n\}$.
- (2) Si $n \geq 4$ et $n \neq 6$ et si G est un sous-groupe de $\text{Bij}(\{1, \dots, n\})$ isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} , alors il existe un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $G = \{f \in \text{Bij}(\{1, \dots, n\}) : f(i) = i\}$.

Démonstration (1) L'action de \mathfrak{S}_n sur \mathfrak{S}_n/G par multiplication à gauche est un morphisme de groupes $\phi: \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{Bij}(\mathfrak{S}_n/G)$. Le noyau de ce morphisme est un sous-groupe distingué de \mathfrak{S}_n inclus dans G . Or, G est d'indice n . Donc, étant donné que $n \geq 5$, le noyau de ce morphisme est trivial. Donc, puisque les groupes \mathfrak{S}_n et $\text{Bij}(\mathfrak{S}_n/G)$ ont même cardinal fini, le morphisme ϕ est un isomorphisme. Soit $\tilde{\psi}: \mathfrak{S}_n/G \rightarrow \{1, \dots, n\}$ une bijection envoyant $\{G\}$ sur n , et $\psi: \text{Bij}(\mathfrak{S}_n/G) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ l'isomorphisme induit par $\tilde{\psi}$. Alors $\psi \circ \phi$ est un automorphisme de \mathfrak{S}_n envoyant G sur le sous-groupe de \mathfrak{S}_n fixant n .

(2) Nous commençons par traiter le cas où $n = 4$. Il découle d'une inspection des sous-groupes de \mathfrak{S}_4 isomorphes à \mathfrak{S}_3 . En effet, \mathfrak{S}_4 possède exactement quatre sous-groupes isomorphes à \mathfrak{S}_3 . Donc, il existe un entier $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $G = \{f \in \text{Bij}(\{1, \dots, n\}) : f(i) = i\}$.

Supposons maintenant que $n \geq 5$ et que $n \neq 6$. Par le premier point du lemme, il existe un automorphisme ϕ de \mathfrak{S}_n envoyant G sur $\{f \in \text{Bij}(\{1, \dots, n\}) : f(n) = n\}$. Or, si $n \neq 6$, tout automorphisme de \mathfrak{S}_n est intérieur. Comme les automorphismes intérieurs préservent le fait d'être le stabilisateur d'un entier, il existe un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $G = \{f \in \text{Bij}(\{1, \dots, n\}) : f(i) = i\}$. \square

Étudions les points fixes du groupe B_n dans l'épine de l'outre-espace de W_n .

Proposition 3.13 Soient $n \geq 4$ et $B_n = \langle [\tau_1], \dots, [\tau_{n-2}] \rangle$.

- (1) Les seuls sommets fixés par B_n dans l'épine de l'outre-espace de W_n sont des $\{0\}$ -étoiles et des F -étoiles.
- (2) Le groupe B_n fixe une unique F -étoile et une unique $\{0\}$ -étoile.

Remarque La proposition 3.13 diffère des propositions 3.1 et 3.6 car elle porte uniquement sur un sous-groupe *particulier* de $\text{Out}(W_n)$. Nous ne savons pas si le résultat reste vrai pour un sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} quelconque.

Démonstration (1) Soient \mathcal{X} un sommet de l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$ fixé par B_n et X un représentant de \mathcal{X} . Soient L l'ensemble des feuilles de \bar{X} et v_1, \dots, v_n les sommets de \bar{X} dont les groupes associés sont non triviaux. Par la proposition 2.8, il existe un entier k tel que le noyau du morphisme naturel $B_n \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ soit isomorphe à $F^k \cap B_n$. Or, ce noyau est un sous-groupe de F^k , et ce dernier est engendré par des twists. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit y_i l'antécédent par le marquage de X du générateur du groupe associé à v_i . Les compositions de twists contenues dans $F^k \cap B_n$ préservent la classe de conjugaison dans W_n de y_i alors que les permutations du groupe engendré par $\{[\tau_1], \dots, [\tau_{n-2}]\}$ ne préservent pas ces dernières. De ce fait, nous avons $F^k \cap B_n = \{1\}$.

Le groupe $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ s'injecte dans $\text{Bij}(L)$. Par ailleurs, étant donné que le morphisme $\phi: B_n \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est injectif, et que B_n est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} , nous avons $|L| \geq n - 1$. De plus, chaque feuille ayant un groupe associé non trivial, nous avons $|L| \leq n$. Donc $|L| \in \{n - 1, n\}$. Examinons les deux cas possibles.

Si $|L| = n - 1$, alors $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à $\text{Bij}(L)$. Montrons que \mathcal{X} est une F -étoile. Soit v un sommet qui n'est pas une feuille à distance maximale du centre de \bar{X} . L'hypothèse de maximalité sur v implique qu'il y a au plus un sommet adjacent à v qui n'est pas une feuille, car sinon nous pourrions trouver un sommet w adjacent à v qui ne serait pas une feuille et qui serait à distance strictement plus grande du centre que v . De ce fait, v est adjacent à au moins $\deg(v) - 1$ feuilles.

Si le groupe associé à v est non trivial, alors v est fixé par B_n car c'est le seul sommet de \bar{X} qui soit de groupe associé non trivial et qui ne soit pas une feuille. Donc, puisque B_n est isomorphe à $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$, le sommet v est fixé par $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$. Enfin, puisque tout élément de $\text{Bij}(L)$ est induit par un élément de $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$, le sommet v est adjacent à toutes les feuilles et \mathcal{X} est une F -étoile.

Si v est un sommet de groupe trivial, alors, par hypothèse, $\deg(v) \geq 3$. De ce fait, v est adjacent à au moins deux feuilles, notées v_1 et v_2 . Soit w une feuille de \bar{X} distincte de v_1 et v_2 . Puisqu'il existe un automorphisme de \bar{X} envoyant v_1 sur w et fixant v_2 , alors w est nécessairement adjacent à v . Donc v est adjacent à toutes les feuilles. Ceci n'est pas possible, car alors X contiendrait uniquement $n - 1$ sommets de groupe associé non trivial. Donc v est nécessairement un sommet de groupe associé non trivial et \mathcal{X} est une F -étoile.

Supposons que $|L| = n$. Montrons alors que \mathcal{X} est une $\{0\}$ -étoile. Le groupe $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ s'injecte dans $\text{Bij}(L)$ qui est isomorphe à \mathfrak{S}_n . Par ailleurs, puisque B_n s'injecte dans $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$, l'image de $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ dans $\text{Bij}(L)$ contient un sous-groupe de $\text{Bij}(L)$ isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} .

Soit H l'image de B_n dans $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$. Par le lemme 3.12(2), si $n \neq 6$, il existe une feuille v_1 de \bar{X} telle que l'image de H dans $\text{Bij}(L)$ soit égale à $\text{Stab}_{\text{Bij}(L)}(v_1)$. Soit v le sommet adjacent à v_1 . Puisque v n'est pas une feuille, $\deg(v) \geq 3$. Ou bien v est adjacent à une autre feuille distincte de v_1 , ou bien v est adjacent à une unique feuille.

Si v est adjacent à une unique feuille, il existe dans \bar{X} des feuilles de $L - \{v_1\}$ à distance au moins 4. Soient w_1 et w_2 deux telles feuilles distinctes de v_1 , telles que w_1 soit à distance maximale du centre et que w_2 soit une feuille distincte de v_1 à distance maximale de w_1 . Puisque la valence de tout sommet de groupe associé trivial est au moins 3, il existe une feuille w_3 à distance 2 de w_2 . Or l'image de H dans $\text{Bij}(L)$ est égale à $\text{Stab}_{\text{Bij}(L)}(v_1)$. Il existe donc un automorphisme de \bar{X} fixant w_3 et envoyant w_2 sur w_1 , ce qui n'est pas possible par hypothèse sur w_1 et w_2 .

Donc v est adjacent à une feuille distincte de v_1 , que l'on note v_2 . Soit w une feuille de \bar{X} distincte de v_1 et v_2 . Étant donné qu'il existe un automorphisme de \bar{X} envoyant v_2 sur w et fixant v_1 , le sommet w est à distance 2 de v_2 . En particulier, \mathcal{X} est une $\{0\}$ -étoile.

Traitons maintenant le cas où $n = 6$. On numérote de 1 à 6 les feuilles. Une construction explicite d'un représentant de l'unique automorphisme extérieur non trivial de \mathfrak{S}_6 (voir par exemple [Miller 1958]) donne que l'unique (à conjugaison près) sous-groupe de $\text{Bij}(L)$ isomorphe à \mathfrak{S}_5 et qui ne soit pas un stabilisateur de feuille est le groupe

$$H = \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6), (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5), (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6), (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4) \rangle.$$

Supposons alors que H soit inclus dans l'image de $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ dans $\text{Bij}(L)$. Le groupe H agit transitivement sur les feuilles de \bar{X} . De ce fait, tous les sommets reliés à des feuilles sont adjacents à un même nombre k de feuilles. Les seules valeurs possibles pour k sont $k \in \{1, 2, 3, 6\}$. Le cas où $k = 1$ n'est pas possible car tout sommet qui n'est pas une feuille est de degré au moins 3 (tous les sommets dont les groupes associés sont non triviaux sont des feuilles). De plus, $k \neq 3$ car le groupe des automorphismes d'un tel graphe ne pourrait contenir simultanément les permutations $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$, $(1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$ et $(1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$. Enfin, $k \neq 2$ car alors \bar{X} posséderait trois sommets adjacents à deux feuilles. Cependant le groupe des automorphismes d'un tel graphe ne pourrait contenir simultanément les permutations $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$, $(1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$ et $(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$. Donc $k = 6$ et X est une $\{0\}$ -étoile.

Ainsi, B_n fixe uniquement des $\{0\}$ -étoiles et des F -étoiles.

(2) Montrons maintenant que B_n fixe une unique F -étoile. Soit X le graphe de groupes marqué pour lequel \bar{X} possède n sommets, notés v_1, \dots, v_n , dont les feuilles sont v_1, \dots, v_{n-1} , et tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'image réciproque par le marquage du générateur du groupe associé à v_i soit x_i . Soit \mathcal{X} la

classe d'équivalence de X . Alors \mathcal{X} est une F -étoile et le stabilisateur de \mathcal{X} est U_n . Puisque $B_n \subseteq U_n$, ceci montre l'existence.

Montrons maintenant l'unicité. Soit \mathcal{Y} une autre F -étoile fixée par B_n . On note Y un représentant de \mathcal{Y} . Par le corollaire 2.6, il existe dans $\text{Fix}_{K_n}(B_n)$ un chemin continu de \mathcal{X} vers \mathcal{Y} . Puisque deux F -étoiles distinctes ne sont pas reliées par une arête dans l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$, et puisque tout sommet de $\text{Fix}_{K_n}(B_n)$ est une $\{0\}$ -étoile ou une F -étoile, ce chemin passe par une $\{0\}$ -étoile adjacente à \mathcal{X} .

Affirmation Soient \mathcal{Z} une $\{0\}$ -étoile adjacente à \mathcal{X} et Z un représentant de \mathcal{Z} . On note v_1, \dots, v_n les sommets de \bar{Z} dont les groupes associés sont non triviaux. Alors l'image réciproque par le marquage de Z des générateurs des groupes associés aux sommets v_1, \dots, v_n est, à conjugaison près,

$$\{x_n^{\alpha_1} x_1 x_n^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_{n-1}} x_{n-1} x_n^{\alpha_{n-1}}, x_n\},$$

avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Démonstration Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit y_i le générateur du groupe associé à v_i . Puisque \mathcal{Z} est adjacente à \mathcal{X} , il existe une arête e de \bar{Z} telle que le graphe de groupes marqué Z' dont le graphe \bar{Z}' est obtenu à partir de \bar{Z} en contractant e soit dans la classe \mathcal{X} . Quitte à renuméroter, on peut supposer que l'un des sommets de e est v_n . Soient T_X et $T_{Z'}$ les arbres de Bass–Serre associés à X et Z' . Les graphes de groupes X et Z' étant équivalents, il existe un homéomorphisme W_n -équivariant $f: T_X \rightarrow T_{Z'}$. Soit v le sommet de T_X de stabilisateur $\langle x_n \rangle$. Alors $f(v)$ a pour stabilisateur $\langle x_n \rangle$. Par ailleurs, étant donné que les sommets adjacents à v ont pour stabilisateurs $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_{n-1} \rangle, \langle x_n x_1 x_n \rangle, \dots, \langle x_n x_{n-1} x_n \rangle$, les sommets adjacents à $f(v)$ ont pour stabilisateurs $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_{n-1} \rangle, \langle x_n x_1 x_n \rangle, \dots, \langle x_n x_{n-1} x_n \rangle$. Donc, tout sous-graphe fini et connexe de $T_{Z'}$ ayant n sommets et $n-1$ feuilles et de centre $f(v)$ est tel que les stabilisateurs des feuilles sont

$$\langle x_n^{\alpha_1} x_1 x_n^{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle x_n^{\alpha_{n-1}} x_{n-1} x_n^{\alpha_{n-1}} \rangle,$$

avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Ainsi, l'image réciproque par le marquage de Z des générateurs des groupes associés aux sommets v_1, \dots, v_n est, à conjugaison près,

$$\langle x_n^{\alpha_1} x_1 x_n^{\alpha_1} \rangle, \dots, \langle x_n^{\alpha_{n-1}} x_{n-1} x_n^{\alpha_{n-1}} \rangle,$$

avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. ◁

Ainsi, au vu de la description des $\{0\}$ -étoiles adjacentes à \mathcal{X} , le groupe B_n fixe une unique $\{0\}$ -étoile adjacente à \mathcal{X} : la $\{0\}$ -étoile Z telle que les antécédents par le marquage des générateurs des groupes de sommets non triviaux soient, à conjugaison près, x_1, \dots, x_n . On note \mathcal{Z} la classe d'équivalence de Z .

Soit \mathcal{Y}' une F -étoile adjacente à \mathcal{Z} . Notons Y' un représentant de \mathcal{Y}' . Il existe une arête e de \bar{Z} telle que le graphe de groupes Z' obtenu en contractant e soit dans \mathcal{Y}' . Les antécédents par le marquage de Y' des générateurs des groupes de sommets sont donc, à conjugaison près, x_1, \dots, x_n .

Ainsi, puisque B_n permute les sommets de tout point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ dont l'image réciproque par le marquage des groupes associés sont $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_{n-1} \rangle$, on voit que l'unique F -étoile adjacente à \mathcal{X} fixée par B_n est \mathcal{X} . Donc, B_n fixe une unique F -étoile dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$.

Montrons enfin que B_n fixe une unique $\{0\}$ -étoile. Soit Z le graphe de groupes marqué dont le graphe sous-jacent possède $n + 1$ sommets, n feuilles, notées w_1, \dots, w_n , et tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'image réciproque par le marquage du générateur du groupe associé à w_i soit x_i . Soit \mathcal{Z} la classe d'équivalence de Z . Alors \mathcal{Z} est une $\{0\}$ -étoile et le stabilisateur de \mathcal{Z} est A_n . Puisque $B_n \subseteq A_n$, ceci montre l'existence.

Montrons l'unicité. Soit \mathcal{Y} une autre $\{0\}$ -étoile fixée par B_n . Par le corollaire 2.6, il existe un chemin continu dans $\text{Fix}_{K_n}(B_n)$ de \mathcal{Z} vers \mathcal{Y} . Au vu de l'assertion (1) de la proposition, ce chemin passe uniquement par des $\{0\}$ -étoiles et des F -étoiles. Or, B_n fixe une unique F -étoile \mathcal{X} , et par la dernière affirmation, l'unique $\{0\}$ -étoile adjacente à \mathcal{X} et fixée par B_n est \mathcal{Z} . Donc B_n fixe une unique $\{0\}$ -étoile dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$. \square

Remarque 3.14 Soit $n \geq 4$. Dans le cas de $\text{Aut}(W_n)$, soit $\tilde{B}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-2} \rangle$, qui est encore isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} . Soit \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ fixé par \tilde{B}_n . On note X un représentant de \mathcal{X} .

(1) Soit \mathcal{X} est une F -étoile, soit \bar{X} possède n feuilles et $n + 1$ sommets.

En effet, une démonstration identique à celle de la proposition 3.13(1) montre que le morphisme $\tilde{B}_n \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est injectif, et que le nombre de feuilles de \bar{X} est soit égal à $n - 1$, soit égal à n . S'il est égal à $n - 1$, une démonstration identique à celle de la proposition 3.13(1) montre que \bar{X} possède n sommets et $n - 1$ feuilles. Comme le groupe $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ contient un sous-groupe isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} et que \bar{X} possède $n - 1$ feuilles, on voit que, nécessairement, le point base de X est son centre. Donc \mathcal{X} est une F -étoile. Si le nombre de feuilles de \bar{X} est égal à n , une démonstration identique à celle de la proposition 3.13(1) montre que \bar{X} possède $n + 1$ sommets et n feuilles.

(2) Le groupe \tilde{B}_n fixe une unique F -étoile.

En effet, il fixe une F -étoile car \tilde{B}_n est un sous-groupe de $\tilde{U}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-2}, \sigma_{1,n} \rangle$ et ce dernier est isomorphe à $F^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$. De ce fait, la remarque 3.10(4) permet de conclure. Nous appellerons \mathcal{X} l'unique F -étoile fixée par \tilde{U}_n .

Pour l'unicité, soit \mathcal{Y} une autre F -étoile fixée par \tilde{B}_n . Puisque l'ensemble des F -étoiles dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ n'est pas connexe, tout chemin continu entre \mathcal{X} et \mathcal{Y} et contenu dans l'ensemble des points fixes de \tilde{B}_n pour l'action de $\text{Aut}(W_n)$ sur l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ passe par un point \mathcal{Z} ayant un représentant Z de graphe sous-jacent possédant n feuilles et $n + 1$ sommets. Soient v_1, \dots, v_n les feuilles de \bar{Z} . Une démonstration identique à celle de la première affirmation de la démonstration de la proposition 3.13(2) montre que l'image réciproque par le marquage de Z des générateurs des groupes associés aux sommets v_1, \dots, v_n est respectivement ou bien x_1, \dots, x_{n-1}, x_n ou bien $x_n x_1 x_n, \dots, x_n x_{n-1} x_n, x_n$. De plus, la description de \tilde{B}_n montre que le point base de Z est contenu dans l'arête reliant le centre de \bar{Z} et v_n .

Soit maintenant \mathcal{L}' un sommet de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ fixé par \tilde{B}_n , adjacent à \mathcal{L} et qui n'est pas une F -étoile. Puisque Z' possède n feuilles et $n + 1$ sommets par le premier point de la remarque, un représentant Z' de \mathcal{L}' est obtenu à partir de Z en déplaçant le point base dans l'arête reliant le centre de \bar{Z} et v_n . De ce fait, les images réciproques par le marquage des générateurs des groupes associés aux feuilles de \bar{Z}' sont les mêmes que pour \mathcal{L} .

Donc, pour conclure sur l'unicité de la F -étoile fixée par \tilde{B}_n , il suffit d'étudier les F -étoiles fixées par \tilde{B}_n qui sont adjacentes à \mathcal{L} . Soit \mathcal{Y}' une F -étoile adjacente à \mathcal{L} . Notons Y' un représentant de \mathcal{Y}' . Il existe une arête e de \bar{Z} telle que le graphe de groupes Z' obtenu en contractant e soit dans \mathcal{Y}' . Les antécédents par le marquage de Y' des générateurs des groupes de sommets sont donc, à conjugaison près, x_1, \dots, x_n . Ainsi, puisque \tilde{B}_n permute transitivement les sommets de tout point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$ dont les images réciproques par le marquage des groupes associés sont $\langle x_1 \rangle, \dots, \langle x_{n-1} \rangle$, on voit que l'unique F -étoile adjacente à \mathcal{L} fixée par \tilde{B}_n est \mathcal{X} . Donc, \tilde{B}_n fixe une unique F -étoile dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{A}(W_n)$.

Remarque 3.15 La proposition 3.13 reste vraie lorsqu'on remplace F par un groupe cyclique fini.

4 Rigidité des automorphismes extérieurs d'un groupe de Coxeter universel

Le but de cette section est de démontrer le théorème 1.1. Nous distinguons différents cas, selon la valeur de n . Soit $\alpha \in \text{Aut}(\text{Out}(W_n))$.

4.1 Démonstration dans le cas $n \geq 5$ et $n \neq 6$

Soit \mathcal{X}_1 la $\{0\}$ -étoile fixée par le sous-groupe fini A_n de $\text{Out}(W_n)$ (l'unicité provient de la proposition 3.1). Alors, d'après la proposition 3.1, $\alpha(A_n)$ est le stabilisateur d'une unique $\{0\}$ -étoile \mathcal{X}_2 . Or $\text{Out}(W_n)$ agit transitivement sur l'ensemble des $\{0\}$ -étoiles, donc il existe $\psi \in \text{Out}(W_n)$ tel que $\psi(\mathcal{X}_1) = \mathcal{X}_2$. Posons $\alpha_0 = \text{ad}(\psi) \circ \alpha$, alors $\alpha_0(A_n) = \text{ad}(\psi) \circ \alpha(A_n) = A_n$.

Puisque $\alpha_0|_{A_n}$ est un automorphisme de A_n , que A_n est isomorphe à \mathfrak{S}_n et que, pour $n \neq 6$, le groupe $\text{Out}(\mathfrak{S}_n)$ est trivial, quitte à changer α_0 dans sa classe d'automorphismes extérieurs, on peut supposer que $\alpha_0|_{A_n} = \text{id}_{A_n}$.

Maintenant, étant donné que $B_n \subseteq U_n$, nous avons $\alpha_0(B_n) = B_n \subseteq \alpha_0(U_n)$. Or, par la proposition 3.13(2), B_n fixe une unique F -étoile. Par ailleurs, le stabilisateur de cette F -étoile est U_n . Donc, puisque $\alpha_0(U_n)$ est également le stabilisateur d'une unique F -étoile par la proposition 3.6, on obtient que $\alpha_0(U_n) = U_n$.

Or, U_n est isomorphe au produit semi-direct $F^{n-2} \rtimes B_n$, et B_n agit sur F^{n-2} (vu comme le quotient de F^{n-1} par son sous-groupe diagonal F) par permutation des facteurs. Soit $\sigma \in B_n$. On note $\text{fix}(\sigma)$ l'ensemble des points fixes de σ agissant par conjugaison dans F^{n-2} . Puisque $\alpha_0(\sigma) = \sigma$ pour tout $\sigma \in B_n$,

on voit que $\alpha_0(\sigma g \sigma^{-1}) = \sigma \alpha_0(g) \sigma^{-1}$ pour tout $\sigma \in \{0\} \rtimes B_n$ et pour tout $g \in F^{n-2} \rtimes \{1\}$; en particulier, si $g \in \text{fix}(\sigma)$, alors $\alpha_0(g) \in \text{fix}(\sigma)$.

Soit maintenant $\sigma = (2 \dots n-1) \in B_n$. Alors $\text{fix}(\sigma) = \{0, [\sigma_{1,n}]\}$. Donc, puisque $\alpha_0([\sigma_{1,n}]) \in \text{fix}(\sigma)$, on a $\alpha_0([\sigma_{1,n}]) = [\sigma_{1,n}]$. De même, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\alpha_0([\sigma_{i,n}]) = [\sigma_{i,n}]$. Ainsi, $\alpha_0|_{F^{n-2}} = \text{id}_{F^{n-2}}$. Puisque, par ailleurs, α_0 est l'identité sur B_n , on voit que $\alpha_0|_{U_n} = \text{id}_{U_n}$. De ce fait, étant donné que $\alpha_0|_{A_n} = \text{id}_{A_n}$ et que A_n et U_n engendrent $\text{Out}(W_n)$ par la proposition 2.1, on voit que $\alpha_0 = \text{id}$ et le résultat s'en déduit.

4.2 Démonstration dans le cas $n = 6$

Dans le cas où $n = 6$, la proposition 3.1 s'appliquant encore, soit α_0 un représentant de la classe d'automorphismes extérieurs de α tel que $\alpha_0(A_n) = A_n$. Supposons que la classe d'automorphismes extérieurs de $\alpha_0|_{A_n}$ soit non triviale. Alors une description explicite d'un automorphisme engendrant l'unique classe d'automorphismes extérieurs de \mathfrak{S}_6 (cf [Miller 1958]) donne, en identifiant A_n et \mathfrak{S}_6 par l'unique isomorphisme envoyant τ_i sur la permutation $(i \ i+1)$ pour $1 \leq i \leq 5$, que

$$\alpha_0(B_n) = \langle [(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)], [(1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)], [(1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)], [(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)] \rangle.$$

Ainsi, $\alpha_0(B_n)$ agit transitivement sur les classes de conjugaison de $\{x_1, \dots, x_n\}$. Alors, puisque $\alpha_0(B_n) \subseteq \alpha_0(U_n)$, par la proposition 3.6, $\alpha_0(B_n)$ fixe une F -étoile \mathcal{X} . Soit X un représentant de \mathcal{X} . Par la proposition 2.8, le noyau du morphisme $\alpha_0(B_n) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à $F^{n-2} \cap \alpha_0(B_n)$.

Or $F^{n-2} \cap \alpha_0(B_n)$ est un 2-sous-groupe distingué de $\alpha_0(B_n)$. Comme $\alpha_0(B_n)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} et que $n = 6$, nous avons $F^{n-2} \cap \alpha_0(B_n) = \{1\}$. Donc $\alpha_0(B_n)$ est isomorphe à $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ car $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} . Soient maintenant v_1, \dots, v_{n-1} les feuilles de \bar{X} et v_n le centre de \bar{X} . Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, soit $\langle y_j \rangle$ l'image réciproque par le marquage du groupe associé à v_j . Le groupe $\text{Aut}_{\text{gr}}(X)$, et donc $\alpha_0(B_n)$, s'identifie à l'ensemble des bijections de $\{v_1, \dots, v_n\}$ fixant v_n . Or, par la proposition 2.1, il existe $\pi \in \text{Bij}(\{x_1, \dots, x_n\})$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $z_i \in W_n$ vérifiant

$$y_i = z_i x_{\pi(i)} z_i^{-1}.$$

Ceci contredit le fait que $\alpha_0(B_n)$ s'identifie à l'ensemble des bijections de $\{v_1, \dots, v_n\}$ fixant v_n , car le groupe $\alpha_0(B_n)$ agit transitivement sur l'ensemble des classes de conjugaison de $\{x_1, \dots, x_n\}$. Donc la classe d'automorphismes extérieurs de $\alpha_0|_{A_n}$ est triviale et on conclut comme dans la section 4.1.

4.3 Démonstration dans le cas $n = 4$

Dans le cas où $n = 4$, les propositions 3.1 et 3.6 ne sont plus valables, car alors tout sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe à \mathfrak{S}_4 est isomorphe au produit semi-direct $V \rtimes \mathfrak{S}_3$, où V est le groupe de Klein. Nous avons cependant la proposition suivante.

Proposition 4.1 Soient $n = 4$ et G un sous-groupe de $\text{Out}(W_n)$ isomorphe au produit semi-direct $F^{n-2} \rtimes \mathfrak{S}_{n-1}$. Alors G est soit le stabilisateur d'une unique F -étoile, soit le stabilisateur d'une unique $\{0\}$ -étoile. Les deux cas sont mutuellement exclusifs.

Démonstration Soient \mathcal{X} un point de l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ fixé par G (qui existe par la proposition 2.3), et X un représentant de \mathcal{X} . Soit L l'ensemble des feuilles de \bar{X} . La proposition 4.1 se démontre de manière identique à la proposition 3.9(3), à ceci près que l'on ne peut pas exclure le cas où \bar{X} possède n feuilles. Il faut alors distinguer le cas où $|L| = n - 1$ et $|L| = n$. Si \bar{X} possède n feuilles, le lemme 3.2 donne que \mathcal{X} est une $\{0\}$ -étoile. Si \bar{X} possède $n - 1$ feuilles, alors la proposition 3.9(3) donne que \mathcal{X} est une F -étoile.

Montrons maintenant que G ne peut fixer à la fois une $\{0\}$ -étoile et une F -étoile. Par la proposition 3.9(1), G est le stabilisateur de tout point fixé par G .

Supposons que G soit le stabilisateur d'une $\{0\}$ -étoile \mathcal{X} . Soit X un représentant de \mathcal{X} . Soient v_1, \dots, v_n les sommets de \bar{X} dont les groupes associés sont non triviaux et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit y_i l'image réciproque par le marquage du générateur du groupe associé à v_i . Alors le groupe G est le groupe engendré par les permutations de $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Soit \mathcal{Y} une F -étoile dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ fixée par G . Par le corollaire 2.6, $\text{Fix}_{K_n}(G)$ est connexe. Il existe donc un chemin continu dans $\text{Fix}_{K_n}(G)$ de \mathcal{X} vers \mathcal{Y} . Les sommets par lesquels passe ce chemin sont uniquement des $\{0\}$ -étoiles et des F -étoiles au vu des points stabilisés par G . Or, le groupe engendré par les permutations de $\{y_1, \dots, y_n\}$ ne fixe aucune F -étoile adjacente à X . En effet, le groupe G contiendrait un élément permutant le centre de la F -étoile avec une feuille, ce qui n'est pas possible. Donc G ne fixe aucune F -étoile.

Enfin, l'unicité du point fixe provient du fait que l'ensemble des $\{0\}$ -étoiles et l'ensemble des F -étoiles sont discrets dans l'épine de $\mathbb{P}\mathcal{O}(W_n)$ alors que l'ensemble des points fixes de G est connexe par le corollaire 2.6. \square

Nous pouvons maintenant montrer le théorème 1.1 dans le cas $n = 4$.

Soit $\alpha \in \text{Aut}(\text{Out}(W_n))$. Soit \mathcal{X}_1 la $\{0\}$ -étoile fixée par le sous-groupe fini $A_n \simeq \mathfrak{S}_4$ de $\text{Out}(W_n)$. Par la proposition 4.1, $\alpha(A_n)$ fixe soit une $\{0\}$ -étoile, soit une F -étoile.

Si $\alpha(A_n)$ fixe une $\{0\}$ -étoile, alors la même démonstration que pour le cas où $n \neq 6$ dans la section 4.1 montre que quitte à changer α dans sa classe d'automorphismes extérieurs, nous avons $\alpha|_{A_n} = \text{id}_{A_n}$. Par la proposition 4.1, le groupe $U_n \simeq F^2 \rtimes \mathfrak{S}_3$ fixe soit une $\{0\}$ -étoile, soit une F -étoile. Étant donné que $B_n \subseteq U_n$ fixe une unique $\{0\}$ -étoile ρ et une unique F -étoile ρ' et que $\alpha|_{B_n} = \text{id}_{B_n}$, on voit que $\alpha(U_n)$ est soit le stabilisateur de ρ , soit le stabilisateur de ρ' . Cependant, puisque le stabilisateur de ρ est A_n et que $\alpha|_{A_n} = \text{id}_{A_n}$, on voit que $\alpha(U_n)$ est le stabilisateur de ρ' . Donc $\alpha(U_n) = U_n$. Le reste de la démonstration est alors identique à celle du cas où $n \neq 6$ dans la section 4.1.

Supposons que $\alpha(A_n)$ fixe une unique F -étoile. Construisons à présent un représentant de la classe d'automorphismes extérieurs de α . Puisque $\text{Out}(W_n)$ agit transitivement sur les F -étoiles, quitte à changer α dans sa classe d'automorphismes extérieurs, on peut supposer que $\alpha(A_n) = U_n$. Soit V le groupe de Klein contenu dans A_n . Alors $\alpha(V)$ est l'unique 2-sous-groupe distingué non trivial de U_n . Donc

$$\alpha(V) = \langle [\sigma_{1,4}], [\sigma_{2,4}], [\sigma_{3,4}] \rangle.$$

Ainsi, puisque $B_n \cap V = \{\text{id}\}$, on voit que $\alpha(B_n) \cap \alpha(V) = \{\text{id}\}$. Par ailleurs, $A_n = B_n V$, donc $U_n = \alpha(B_n)\alpha(V)$. De ce fait, $\alpha(B_n)$ est un sous-groupe de U_n d'ordre 6. Or, il existe une unique classe de conjugaison de sous-groupes d'ordre 6 dans U_n . Donc, quitte à changer α dans sa classe d'automorphismes extérieurs, on peut supposer que $\alpha(B_n) = B_n$. De même, puisque B_n est isomorphe à \mathfrak{S}_3 , quitte à changer α dans sa classe d'automorphismes extérieurs, on peut supposer que $\alpha|_{B_n} = \text{id}_{B_n}$.

Déterminons à présent l'image de $[\tau_3]$ et $[\sigma_{3,4}]$ par α . Puisque $[\tau_1][\tau_3] \in V$, on voit que $\alpha([\tau_1][\tau_3]) \in \{[\sigma_{1,4}], [\sigma_{2,4}], [\sigma_{3,4}]\}$. Or, $[\tau_1]$ commute avec $[\tau_1][\tau_3]$, donc $\alpha([\tau_1][\tau_3])$ doit également commuter avec $[\tau_1]$. De ce fait, $\alpha([\tau_1][\tau_3]) = [\sigma_{3,4}]$ et $\alpha([\tau_3]) = [\tau_1][\sigma_{3,4}]$.

Déterminons l'image de $[\sigma_{3,4}]$ par α . Puisque $\alpha(B_n) = B_n$, le groupe $\alpha(U_n)$ est le stabilisateur d'un point fixe de B_n . Par la proposition 3.13, B_n fixe uniquement deux sommets de l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_n)$: la $\{0\}$ -étoile stabilisée par A_n et la F -étoile stabilisée par U_n . Comme $\alpha(A_n) = U_n$, on a nécessairement $\alpha(U_n) = A_n$. Donc $\alpha([\sigma_{3,4}]) \in V$. Puisque $[\sigma_{3,4}]$ commute avec $[\tau_1]$, on obtient que $\alpha([\sigma_{3,4}]) = [\tau_1][\tau_3]$.

Donc α se restreint en l'identité sur B_n , envoie $[\tau_3]$ sur $[\tau_1][\sigma_{3,4}]$ et $[\sigma_{3,4}]$ sur $[\tau_1][\tau_3]$. Comme B_n , $[\tau_3]$ et $[\sigma_{3,4}]$ engendrent $\text{Out}(W_4)$, ceci montre qu'un tel automorphisme α , s'il existe, est unique modulo automorphisme intérieur.

Réciproquement, montrons que l'application α de $B_n \cup \{[\tau_3], [\sigma_{3,4}]\}$ dans $\text{Out}(W_4)$ définie par $\alpha|_{B_n} = \text{id}_{B_n}$, $\alpha([\tau_3]) = [\tau_1][\sigma_{3,4}]$ et $\alpha([\sigma_{3,4}]) = [\tau_1][\tau_3]$ s'étend de manière unique en un morphisme de groupes de $\text{Out}(W_4)$. Comme $[\tau_1]$ commute avec $[\tau_3]$ et $[\sigma_{3,4}]$, ceci montre que α est involutif, donc un automorphisme de $\text{Out}(W_4)$. Sa classe dans $\text{Out}(\text{Out}(W_4))$ est non triviale (car son action sur l'épine de $\mathbb{P}\mathbb{C}(W_4)$ est non triviale), ce qui montre le théorème 1.1 lorsque $n = 4$.

Pour simplifier les notations, nous notons $[i j]$ la classe d'automorphismes extérieurs de la transposition permutant x_i et x_j . Notons

$$S = \{[i j] : 1 \leq i, j \leq 4\} \cup \{[\sigma_{i,j}] : 1 \leq i \neq j \leq 4\},$$

qui est une partie génératrice de $\text{Out}(W_4)$ par la proposition 2.1. Un petit calcul élémentaire montre que, si $i = 1, 2$, alors

$$\begin{aligned} [i 4] &= [i 3][3 4][i 3], & \alpha([i 3])\alpha([3 4])\alpha([i 3]) &= [j k][\sigma_{i,4}], \\ [\sigma_{i,4}] &= [i 3][\sigma_{3,4}][i 3], & \alpha([i 3])\alpha([\sigma_{3,4}])\alpha([i 3]) &= [j k][i 4], \end{aligned}$$

où $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} - \{i\}$. Considérons l'application $\tilde{\alpha}$ de S dans $\text{Out}(W_4)$ étendant α sur $S \cap (B_n \cup \{[3 4], [\sigma_{3,4}]\})$ et telle que, si $i = 1, 2$,

$$\tilde{\alpha}([i 4]) = [j k][\sigma_{i,4}] \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}([\sigma_{i,4}]) = [j k][i 4],$$

où $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} - \{i\}$. Des calculs élémentaires pour lesquels nous renvoyons à [Guerch 2022] montrent que cette application préserve, quand $n = 4$, la présentation de $\text{Out}(W_n)$ donnée par Gilbert [1987, Theorem 2.20], ce qui conclut.

4.4 Démonstration de la rigidité de $\text{Aut}(W_n)$

Nous démontrons à présent le théorème 1.2. Soient $n \geq 4$ et $\alpha \in \text{Aut}(\text{Aut}(W_n))$. Soient $\tilde{A}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$, $\tilde{B}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-2} \rangle$ et $\tilde{U}_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-2}, \sigma_{1,n} \rangle$. En utilisant les remarques 3.4, 3.10(4) et 3.14(2), et en effectuant une démonstration identique à celle du théorème 1.1 dans les cas où $n \geq 5$, on voit que, quitte à changer α dans sa classe d'automorphismes extérieurs, $\alpha|_{\tilde{A}_n} = \text{id}_{\tilde{A}_n}$ et $\alpha(\tilde{U}_n) = \tilde{U}_n$.

Or \tilde{U}_n est isomorphe à $F^{n-1} \rtimes \tilde{B}_n$. Soit $\sigma \in \tilde{B}_n$. On note $\text{fix}(\sigma)$ l'ensemble des points fixes de σ agissant par conjugaison dans F^{n-1} . On voit que $\alpha(\sigma g \sigma^{-1}) = \sigma \alpha(g) \sigma^{-1}$ pour tout $\sigma \in \{0\} \times \tilde{B}_n$ et pour tout $g \in F^{n-1} \rtimes \{1\}$; en particulier, si $g \in \text{fix}(\sigma)$, alors $\alpha(g) \in \text{fix}(\sigma)$.

Soit maintenant $\sigma = (2 \dots n-1) \in B_n$. Alors $\text{fix}(\sigma) = \{0, \sigma_{1,n}, \prod_{i \neq 1,n} \sigma_{i,n}, \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,n}\}$. Donc $\alpha(\sigma_{1,n}) \in \{\sigma_{1,n}, \prod_{i \neq 1,n} \sigma_{i,n}, \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,n}\}$. Comme $\prod_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,n}$ est l'unique élément non trivial dans le centre de \tilde{U}_n , on voit que $\alpha(\sigma_{1,n}) \neq \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,n}$.

Supposons par l'absurde que $\alpha(\sigma_{1,n}) = \prod_{i \neq 1,n} \sigma_{i,n}$. Pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, notons $(1 j)$ la transposition de \tilde{B}_n permutant x_1 et x_j . Alors, on voit que $\alpha(\sigma_{j,n}) = \alpha((1 j)\sigma_{1,n}(1 j)) = \prod_{i \neq j,n} \sigma_{i,n}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Un calcul immédiat montre alors que, pour tout $j \neq k, n$, et $k < n$,

$$\alpha(\sigma_{k,j}) = \alpha((j n)\sigma_{k,n}(j n)) = \prod_{i \neq j,k} \sigma_{i,j}.$$

Or $\sigma_{1,2}\sigma_{3,4} = \sigma_{3,4}\sigma_{1,2}$, alors que

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma_{1,2})\alpha(\sigma_{3,4})(x_1) &= \prod_{i \neq 1,2} \sigma_{i,2} \prod_{i \neq 3,4} \sigma_{i,4}(x_1) = x_2 x_4 x_2 x_1 x_2 x_4 x_2, \\ \alpha(\sigma_{3,4})\alpha(\sigma_{1,2})(x_1) &= \prod_{i \neq 3,4} \sigma_{i,4} \prod_{i \neq 1,2} \sigma_{i,2}(x_1) = x_4 x_1 x_4. \end{aligned}$$

Donc $\alpha(\sigma_{1,2})\alpha(\sigma_{3,4}) \neq \alpha(\sigma_{3,4})\alpha(\sigma_{1,2})$. Ceci contredit le fait que α est un morphisme de groupes. Ainsi, $\alpha(\sigma_{1,n}) = \sigma_{1,n}$. Par la proposition 2.1, nous avons $\alpha = \text{id}$. Ceci conclut la démonstration du théorème 1.2.

Bibliographie

- [Bridson et Vogtmann 2000] **MR Bridson, K Vogtmann**, *Automorphisms of automorphism groups of free groups*, J. Algebra 229 (2000) 785–792 MR Zbl
- [Culler et Vogtmann 1986] **M Culler, K Vogtmann**, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. 84 (1986) 91–119 MR Zbl

- [Fouxe-Rabinovitch 1941] **DI Fouxe-Rabinovitch**, *On the automorphism group of free products, II*, Mat. Sb. 9(51) (1941) 183–220 MR Zbl En russe
- [Gilbert 1987] **ND Gilbert**, *Presentations of the automorphism group of a free product*, Proc. Lond. Math. Soc. 54 (1987) 115–140 MR Zbl
- [Guerch 2022] **Y Guerch**, *Géométrie, dynamique et rigidité de groupes d'automorphismes de produits libres*, thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (2022) Voir <https://www.theses.fr/2022UPASM012>
- [Guirardel et Levitt 2007a] **V Guirardel, G Levitt**, *Deformation spaces of trees*, Groups Geom. Dyn. 1 (2007) 135–181 MR Zbl
- [Guirardel et Levitt 2007b] **V Guirardel, G Levitt**, *The outer space of a free product*, Proc. Lond. Math. Soc. 94 (2007) 695–714 MR Zbl
- [Hensel et Kielak 2018] **S Hensel, D Kielak**, *Nielsen realization by gluing: limit groups and free products*, Michigan Math. J. 67 (2018) 199–223 MR Zbl
- [Ivanov 1997] **NV Ivanov**, *Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces*, Int. Math. Res. Not. 1997 (1997) 651–666 MR Zbl
- [Levitt 2005] **G Levitt**, *Automorphisms of hyperbolic groups and graphs of groups*, Geom. Dedicata 114 (2005) 49–70 MR Zbl
- [McCullough et Miller 1996] **D McCullough, A Miller**, *Symmetric automorphisms of free products*, Mem. Amer. Math. Soc. 582, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996) MR Zbl
- [Miller 1958] **DW Miller**, *On a theorem of Hölder*, Amer. Math. Monthly 65 (1958) 252–254 MR Zbl
- [Mostow 1973] **GD Mostow**, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. of Math. Stud. 78, Princeton Univ. Press (1973) MR Zbl
- [Mühlherr 1997] **B Mühlherr**, *Automorphisms of free groups and universal Coxeter groups*, dans “Symmetries in science, IX” (B Gruber, M Ramek, éditeurs), Plenum, New York (1997) 263–268 MR
- [Thomas 2020] **S Thomas**, *The automorphism tower problem*, projet de livre (2020) Voir <https://sites.math.rutgers.edu/~sthomas/tower.pdf>
- [Varghese 2021] **O Varghese**, *The automorphism group of the universal Coxeter group*, Expo. Math. 39 (2021) 129–136 MR Zbl

Laboratoire de mathématique d’Orsay, Université Paris-Saclay, UMR 8628 CNRS
Orsay, France

Adresse actuelle : ENS-Lyon, UMR 5669 CNRS, Université de Lyon, UMPA
Lyon, France

yassine.guerch@ens-lyon.fr

Received: 10 May 2021

ALGEBRAIC & GEOMETRIC TOPOLOGY

msp.org/agt

EDITORS

PRINCIPAL ACADEMIC EDITORS

John Etnyre
etnyre@math.gatech.edu
Georgia Institute of Technology

Kathryn Hess
kathryn.hess@epfl.ch
École Polytechnique Fédérale de Lausanne

BOARD OF EDITORS

Julie Bergner	University of Virginia jeb2md@eservices.virginia.edu	Robert Lipshitz	University of Oregon lipshitz@uoregon.edu
Steven Boyer	Université du Québec à Montréal cohf@math.rochester.edu	Norihiko Minami	Nagoya Institute of Technology nori@nitech.ac.jp
Tara E Brendle	University of Glasgow tara.brendle@glasgow.ac.uk	Andrés Navas	Universidad de Santiago de Chile andres.navas@usach.cl
Indira Chatterji	CNRS & Univ. Côte d'Azur (Nice) indira.chatterji@math.cnrs.fr	Thomas Nikolaus	University of Münster nikolaus@uni-muenster.de
Alexander Dranishnikov	University of Florida dranish@math.ufl.edu	Robert Oliver	Université Paris 13 bobol@math.univ-paris13.fr
Tobias Ekholm	Uppsala University, Sweden tobias.ekholm@math.uu.se	Jessica S Purcell	Monash University jessica.purcell@monash.edu
Mario Eudave-Muñoz	Univ. Nacional Autónoma de México mario@matem.unam.mx	Birgit Richter	Universität Hamburg birgit.richter@uni-hamburg.de
David Futер	Temple University dfuter@temple.edu	Jérôme Scherer	École Polytech. Féd. de Lausanne jerome.scherer@epfl.ch
John Greenlees	University of Warwick john.greenlees@warwick.ac.uk	Vesna Stojanoska	Univ. of Illinois at Urbana-Champaign vesna@illinois.edu
Ian Hambleton	McMaster University ian@math.mcmaster.ca	Zoltán Szabó	Princeton University szabo@math.princeton.edu
Matthew Hedden	Michigan State University mhedden@math.msu.edu	Maggy Tomova	University of Iowa maggy-tomova@uiowa.edu
Hans-Werner Henn	Université Louis Pasteur henn@math.u-strasbg.fr	Nathalie Wahl	University of Copenhagen wahl@math.ku.dk
Daniel Isaksen	Wayne State University isaksen@math.wayne.edu	Chris Wendl	Humboldt-Universität zu Berlin wendl@math.hu-berlin.de
Thomas Koberda	University of Virginia thomas.koberda@virginia.edu	Daniel T Wise	McGill University, Canada daniel.wise@mcgill.ca
Christine Lescop	Université Joseph Fourier lescop@ujf-grenoble.fr		

See inside back cover or msp.org/agt for submission instructions.

The subscription price for 2024 is US \$705/year for the electronic version, and \$1040/year (+\$70, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP. Algebraic & Geometric Topology is indexed by Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH, Current Mathematical Publications and the Science Citation Index.

Algebraic & Geometric Topology (ISSN 1472-2747 printed, 1472-2739 electronic) is published 9 times per year and continuously online, by Mathematical Sciences Publishers, c/o Department of Mathematics, University of California, 798 Evans Hall #3840, Berkeley, CA 94720-3840. Periodical rate postage paid at Oakland, CA 94615-9651, and additional mailing offices. POSTMASTER: send address changes to Mathematical Sciences Publishers, c/o Department of Mathematics, University of California, 798 Evans Hall #3840, Berkeley, CA 94720-3840.

AGT peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**
nonprofit scientific publishing

<https://msp.org/>

© 2024 Mathematical Sciences Publishers

ALGEBRAIC & GEOMETRIC TOPOLOGY

Volume 24 Issue 1 (pages 1–594) 2024

Chow–Witt rings of Grassmannians	1
MATTHIAS WENDT	
Higher chromatic Thom spectra via unstable homotopy theory	49
SANATH K DEVALAPURKAR	
The deformation space of nonorientable hyperbolic 3–manifolds	109
JUAN LUIS DURÁN BATALLA and JOAN PORTI	
Realization of Lie algebras and classifying spaces of crossed modules	141
YVES FÉLIX and DANIEL TANRÉ	
Knot Floer homology, link Floer homology and link detection	159
FRASER BINNS and GAGE MARTIN	
Models for knot spaces and Atiyah duality	183
SYUNJI MORIYA	
Automorphismes du groupe des automorphismes d’un groupe de Coxeter universel	251
YASSINE GUERCH	
The $RO(C_4)$ cohomology of the infinite real projective space	277
NICK GEORGAKOPOULOS	
Annular Khovanov homology and augmented links	325
HONGJIAN YANG	
Smith ideals of operadic algebras in monoidal model categories	341
DAVID WHITE and DONALD YAU	
The persistent topology of optimal transport based metric thickenings	393
HENRY ADAMS, FACUNDO MÉMOLI, MICHAEL MOY and QINGSONG WANG	
A generalization of moment-angle manifolds with noncontractible orbit spaces	449
LI YU	
Equivariant Seiberg–Witten–Floer cohomology	493
DAVID BARAGLIA and PEDRAM HEKMATI	
Constructions stemming from nonseparating planar graphs and their Colin de Verdière invariant	555
ANDREI PAVELESCU and ELENA PAVELESCU	
Census L –space knots are braid positive, except for one that is not	569
KENNETH L BAKER and MARC KEGEL	
Branched covers and rational homology balls	587
CHARLES LIVINGSTON	