

# *Algebra & Number Theory*

Volume 2

2008

No. 1

Construction de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules:  
représentations  $p$ -adiques et  $B$ -paires

Laurent Berger

 mathematical sciences publishers



# Construction de $(\varphi, \Gamma)$ -modules: représentations $p$ -adiques et $B$ -paires

Laurent Berger

Soit  $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}$ . On étudie la catégorie des  $B$ -paires  $(W_e, W_{\text{dR}}^+)$  où  $W_e$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module libre muni d'une action semi-linéaire et continue de  $G_K$  et où  $W_{\text{dR}}^+$  est un  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -réseau stable par  $G_K$  de  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$ . Cette catégorie contient celle des représentations  $p$ -adiques, et est naturellement équivalente à la catégorie de tous les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba.

Let  $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}$ . We study the category of  $B$ -pairs  $(W_e, W_{\text{dR}}^+)$  where  $W_e$  is a free  $\mathbf{B}_e$ -module with a semilinear and continuous action of  $G_K$  and where  $W_{\text{dR}}^+$  is a  $G_K$ -stable  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -lattice in  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$ . This category contains the category of  $p$ -adic representations and is naturally equivalent to the category of all  $(\varphi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring.

## Introduction

Dans tout cet article,  $p$  est un nombre premier,  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p$ , et  $K$  est une extension finie totalement ramifiée de  $K_0 = W(k)[1/p]$ . On s'intéresse aux représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ . La théorie de Hodge  $p$ -adique [Fontaine 1994a; 1994b] a pour but de décrire certaines de ces représentations, celles qui « proviennent de la géométrie », en termes d'objets plus maniables, les  $(\varphi, N)$ -modules filtrés. Le résultat le plus satisfaisant dans cette direction est le théorème de Colmez–Fontaine, qui dit que le foncteur  $V \mapsto D_{\text{st}}(V)$  réalise une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques semi-stables et la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés admissibles.

Si  $D$  est un  $\varphi$ -module filtré qui provient de la cohomologie d'un schéma propre  $X$  sur  $\mathbb{C}_K$ , alors le  $\varphi$ -module sous-jacent ne dépend que de la fibre spéciale de  $X$  (c'en est la cohomologie cristalline) alors que la filtration ne dépend que de la fibre générique (c'est la filtration de Hodge de la cohomologie de de Rham, dans laquelle se plonge la cohomologie cristalline). Si  $V = V_{\text{cris}}(D)$  et  $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}$ , alors

*MSC2000:* primary 11F80; secondary 14F30, 11S25, 11S20, 11S15, 11F85.

*Mots-clés:*  $p$ -adic Hodge theory,  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, Frobenius slopes,  $B$ -paires.

on voit que  $\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = (\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$  ne dépend que de la structure de  $\varphi$ -module de  $D$  et de plus, les  $\varphi$ -modules  $D_1$  et  $D_2$  sont isomorphes si et seulement si les  $\mathbf{B}_e$ -représentations  $\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$  et  $\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$  le sont (voir la proposition 8.2 de [Fontaine 2003]). Par ailleurs,  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{K_0} D)$  et les modules filtrés  $K \otimes_{K_0} D_1$  et  $K \otimes_{K_0} D_2$  sont isomorphes si et seulement si les  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -représentations  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$  et  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$  le sont.

L'idée de cet article est d'isoler les phénomènes liés à la « fibre spéciale » et à la « fibre générique » en considérant non pas des représentations  $p$ -adiques  $V$ , mais des  $B$ -paires  $W = (W_e, W_{\text{dR}}^+)$  où  $W_e$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module libre muni d'une action semi-linéaire et continue de  $G_K$  et où  $W_{\text{dR}}^+$  est un  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -réseau stable par  $G_K$  de  $W_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$ . Rappelons que les anneaux  $\mathbf{B}_{\text{cris}}$  et  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  sont reliés, en plus de l'inclusion  $\mathbf{B}_{\text{cris}} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}$ , par la *suite exacte fondamentale* :

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}/\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow 0.$$

Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors on lui associe la  $B$ -paire  $W(V) = (\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$  et ce foncteur est pleinement fidèle car  $\mathbf{B}_e \cap \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = \mathbb{Q}_p$  ce qui fait que  $V = W_e(V) \cap W_{\text{dR}}^+(V)$ .

L'un des principaux outils dont on dispose pour étudier les représentations  $p$ -adiques est la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. De fait, on a une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques et la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur l'anneau de Robba (en combinant des résultats de Fontaine, Cherbonnier–Colmez et Kedlaya). Le premier résultat de cet article est que l'on peut associer à toute  $B$ -paire  $W$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D(W)$  sur l'anneau de Robba, et que ce foncteur est alors une équivalence de catégories.

**Théorème A.** *Le foncteur  $W \mapsto D(W)$  réalise une équivalence de catégories entre la catégorie des  $B$ -paires et la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba.*

La sous-catégorie pleine des  $B$ -paires de la forme  $W(V)$  correspond à la sous-catégorie pleine des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales. On peut alors se demander à quoi correspondent les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules isoclines. Si  $h \geq 1$  et  $a \in \mathbb{Z}$  sont premiers entre eux, soit  $\text{Rep}(a, h)$  la catégorie dont les objets sont les  $\mathbb{Q}_{p^h}$ -espaces vectoriels  $V_{a,h}$  de dimension finie, munis d'une action semi-linéaire de  $G_K$  et d'un Frobenius lui aussi semi-linéaire  $\varphi : V_{a,h} \rightarrow V_{a,h}$  qui commute à  $G_K$  et qui vérifie  $\varphi^h = p^a$ . Si  $V_{a,h} \in \text{Rep}(a, h)$ , alors on pose  $W_e(V_{a,h}) = (\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1}$  et  $W_{\text{dR}}^+(V_{a,h}) = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} V_{a,h}$ .

**Théorème B.** *Si  $V_{a,h} \in \text{Rep}(a, h)$ , alors  $W(V_{a,h}) = (W_e(V_{a,h}), W_{\text{dR}}^+(V_{a,h}))$  est une  $B$ -paire et le foncteur  $V_{a,h} \mapsto W(V_{a,h})$  définit une équivalence de catégories entre  $\text{Rep}(a, h)$  et la catégorie des  $B$ -paires  $W$  telles que  $D(W)$  est isocline de pente  $a/h$ .*

Si la catégorie des  $B$ -paires est plus riche que la catégorie des représentations  $p$ -adiques, la morale de cet article est qu'elle est aussi plus maniable. Ceci est dû au fait qu'il est plus facile de travailler avec tous les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba que de se restreindre à ceux qui sont étales. La généralisation du théorème de Colmez–Fontaine aux  $B$ -paires devient alors un simple exercice d'algèbre linéaire. Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré, et si  $W_e(D) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1, N=0}$  et  $W_{\text{dR}}^+(D) = \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_K D_K)$ , alors  $W(D) = (W_e(D), W_{\text{dR}}^+(D))$  est une  $B$ -paire, qui est semi-stable en un sens évident. Le foncteur  $D \mapsto W(D)$  réalise alors une équivalence de catégories entre la catégorie des  $B$ -paires semi-stables et la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés.

Pour retrouver le théorème de Colmez–Fontaine à partir de cet énoncé, il faut identifier quelles sont les  $B$ -paires semi-stables qui proviennent des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés admissibles. On peut faire cela en passant par les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, c'est ce qui est fait dans [Berger 2004a], où l'on démontre suffisamment pour impliquer aussi le théorème de monodromie  $p$ -adique pour les  $B$ -paires : toute  $B$ -paire de de Rham est potentiellement semi-stable.

Dans la suite de l'article, nous donnons quelques applications du théorème A. Par exemple, on montre que pour tout  $\varphi$ -module  $D$  sur l'anneau de Robba, il existe un  $\varphi$ -module étale  $M \subset D[1/t]$  tel que  $M[1/t] = D[1/t]$ . Comme  $D(W)[1/t]$  « correspond » à  $W_e$ , on déduit de cet énoncé le résultat suivant, où

$$H_K = \text{Gal}(\bar{K}/K(\mu_{p^\infty})).$$

**Théorème C.** *Si  $W_e$  est une  $\mathbf{B}_e$ -représentation de  $G_K$ , alors il existe une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $H_K$  telle que la restriction de  $W_e$  à  $H_K$  est isomorphe à  $\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ .*

Enfin, nous donnons (quand  $K \subset K_0(\mu_{p^\infty})$ ) une construction des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de hauteur finie (ce sont ceux qui ont une base dans laquelle les matrices de  $\varphi$  et de  $\gamma \in \Gamma_K$  n'ont pas de dénominateurs en  $X$ ) à partir de «  $\varphi$ -modules filtrés sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$  ». Cela permet d'éclaircir la structure des  $B$ -paires de hauteur finie, et donc en particulier des représentations de hauteur finie. Un  $\varphi$ -module filtré sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$  est un  $\varphi$ -module  $D$  sur  $K_0$  muni d'une action de  $\Gamma_K$  commutant à  $\varphi$  et d'une filtration stable par  $\Gamma_K$  sur  $D_\infty = K_\infty \otimes_{K_0} D$ .

**Théorème D.** *Si  $D$  est un  $\varphi$ -module filtré sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$ , alors la  $B$ -paire  $W(D) = ((\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{K_\infty} D_\infty)$  est de hauteur finie.*

*Toute  $B$ -paire de hauteur finie s'obtient de cette manière et  $W(D_1) = W(D_2)$  si et seulement si il existe un isomorphisme  $K_0[t, t^{-1}] \otimes_{K_0} D_1 = K_0[t, t^{-1}] \otimes_{K_0} D_2$  compatible à  $\varphi$  et  $\Gamma_K$ , et compatible à la filtration quand on étend les scalaires à  $K_\infty((t))$ .*

Des objets de nature similaire ont été étudiés, dans un cadre un peu différent, dans [Kisin 2006].

Pour terminer cette introduction, signalons que la notion de représentation trianguline de [Colmez 2005 ; 2007] s'écrit de manière très agréable en termes de  $B$ -paires. On dit qu'une  $B$ -paire est *trianguline* si elle est extension successive de  $B$ -paires de dimension 1. Par le théorème A, cela revient à dire que  $D(W)$  est extension successive de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de rang 1. On retrouve donc la définition de Colmez dans le cas où  $W = W(V)$ .

## 1. Rappels et compléments

Dans ce chapitre, nous donnons des rappels sur les anneaux de périodes et les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

**1.1. L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  et ses petits camarades.** Nous commençons par faire des rappels très succints sur les définitions (données dans [Fontaine 1994a] par exemple) des divers anneaux que nous utilisons dans cet article. Rappelons que

$$\tilde{\mathbf{E}}^+ = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbb{O}_{\mathbb{C}_p}$$

est un anneau de caractéristique  $p$ , complet pour la valuation  $\text{val}_{\mathbf{E}}$  définie par  $\text{val}_{\mathbf{E}}(x) = \text{val}_p(x^{(0)})$  et qui contient un élément  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon^{(n)}$  est une racine primitive  $p^n$ -ième de l'unité. On fixe un tel  $\varepsilon$  dans tout l'article. L'anneau  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}^+[1/(\varepsilon - 1)]$  est alors un corps qui contient comme sous-corps dense la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p((\varepsilon - 1))$ . On pose  $\tilde{\mathbf{A}}^+ = W(\tilde{\mathbf{E}}^+)$  et  $\tilde{\mathbf{A}} = W(\tilde{\mathbf{E}})$  ainsi que  $\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[1/p]$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}[1/p]$ . L'application  $\theta : \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \mathbb{C}_p$  qui à  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  associe  $\sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}$  est un morphisme d'anneaux surjectif et  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  est le complété de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  pour la topologie  $\ker(\theta)$ -adique, ce qui en fait un espace topologique de Fréchet. On pose  $X = [\varepsilon] - 1 \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  et  $t = \log(1 + X) \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  et on définit  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  par  $\mathbf{B}_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[1/t]$ . Soit  $\tilde{p} \in \tilde{\mathbf{E}}^+$  un élément tel que  $p^{(0)} = p$ . L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$  est l'ensemble des séries  $\sum_{n \geq 0} b_n ([\tilde{p}]/p)^n$  où  $b_n \in \tilde{\mathbf{B}}^+$  et  $b_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  ce qui en fait un sous-anneau de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  muni en plus d'un Frobenius  $\varphi$  qui est injectif, mais pas surjectif. On pose  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \bigcap_{n \geq 0} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{max}}^+)$  ce qui en fait un sous-anneau de  $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$  sur lequel  $\varphi$  est bijectif. On pose enfin  $\mathbf{B}_{\text{max}} = \mathbf{B}_{\text{max}}^+[1/t]$  et  $\mathbf{B}_{\text{st}} = \mathbf{B}_{\text{max}}[\log[\tilde{p}]]$  ce qui fait de  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  un sous-anneau de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  muni de  $\varphi$  et d'un opérateur de monodromie  $N$ . Remarquons que l'on travaille souvent avec  $\mathbf{B}_{\text{cris}}$  plutôt que  $\mathbf{B}_{\text{max}}$  mais le fait de préférer  $\mathbf{B}_{\text{max}}$  ne change rien aux résultats et est plus agréable pour des raisons techniques.

Rappelons que les anneaux  $\mathbf{B}_{\text{max}}$  et  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  sont reliés, en plus de l'inclusion  $\mathbf{B}_{\text{max}} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}$ , par la suite exacte fondamentale  $0 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\text{max}}^{\varphi=1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}/\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow 0$ . Ce sont ces anneaux que l'on utilise en théorie de Hodge  $p$ -adique. Le point de départ de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba (dont on parle au paragraphe

1.2) est la construction d'anneaux intermédiaires entre  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$ . Si  $r > 0$ , soit  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  l'ensemble des  $x = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \in \tilde{\mathbf{B}}$  tels que  $\text{val}_{\mathbb{E}}(x_k) + k \cdot pr / (p-1)$  tend vers  $+\infty$  quand  $k$  augmente. On pose  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \bigcup_{r>0} \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$ , c'est le corps des éléments sur-convergents, défini dans [Cherbonnier et Colmez 1998]. L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} = \bigcup_{r>0} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  défini dans [Berger 2002, §2.3] est en quelque sorte la somme des anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ ; de fait, on a une suite exacte (d'anneaux et d'espaces de Fréchet) :

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ \oplus \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \rightarrow 0.$$

Rappelons que  $K_0 = W(k)[1/p]$ ; pour  $1 \leq n \leq +\infty$ , on pose  $K_n = K(\mu_{p^n})$  et  $H_K = \text{Gal}(\bar{K}/K_{\infty})$  et  $\Gamma_K = G_K/H_K$ . Si  $R$  est un anneau muni d'une action de  $G_K$  (c'est le cas pour tous ceux que nous considérons), on note  $R_K = R^{H_K}$ . L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  contient l'ensemble des séries  $f(X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k X^k$  avec  $f_k \in K_0$  telles que  $f(X)$  converge sur  $\{p^{-1/r} \leq |X| < 1\}$ . Cet anneau est noté  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K_0}^{\dagger, r}$ . Si  $K$  est une extension finie de  $K_0$ , il lui correspond par la théorie du corps de normes [Fontaine et Wintenberger 1979; Wintenberger 1983] une extension finie  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$  qui s'identifie (si  $r$  est assez grand) à l'ensemble des séries  $f(X_K) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k X_K^k$  avec  $f_k \in K'_0$  telles que  $f(X_K)$  converge sur  $\{p^{-1/er} \leq |X_K| < 1\}$  où  $X_K$  est un certain élément de  $\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger}$  et  $K'_0$  est la plus grande sous-extension non ramifiée de  $K_0$  dans  $K_{\infty}$  et  $e = [K_{\infty} : K_0(\mu_{p^{\infty}})]$ . On pose

$$\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger} = \bigcup_{r>0} \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}, \quad \mathbf{B}_K^{\dagger, r} = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r} \cap \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger}, \quad \mathbf{B}_K^{\dagger} = \bigcup_{r>0} \mathbf{B}_K^{\dagger, r}.$$

Les anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  et  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$  coïncident avec les anneaux  $\Gamma_{\text{an}, \text{con}}^{\text{alg}}$  et  $\Gamma_{\text{an}, \text{con}}$  définis dans [Kedlaya 2005, §2.2] (voir en particulier la convention 2.2.16 et la remarque 2.4.13 de [Kedlaya 2005]). Kedlaya les a étudiés en détail et nous rappelons à présent quelques uns des résultats que nous utilisons dans la suite.

**Proposition 1.1.1.** *Les anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  et l'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  sont de Bézout, ainsi que les anneaux  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$  et l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$ . Si  $R$  est l'un de ces anneaux, et si  $M$  est un sous- $R$ -module d'un  $R$ -module libre de rang fini, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $M$  est libre ;
- (2)  $M$  est fermé ;
- (3)  $M$  est de type fini.

*Démonstration.* Pour  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  ou  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , c'est le théorème 2.9.6 de [Kedlaya 2005] et pour  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  ou  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$ , c'est une conséquence immédiate de ce que  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} = \bigcup_{r>0} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  et  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger} = \bigcup_{r>0} \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ . L'affirmation quant aux sous-modules des modules libres est contenue dans le corollaire 2.8.5 et la définition 2.9.5 de [Kedlaya 2005].  $\square$

**Corollaire 1.1.2.** *Si  $R$  est l'un des anneaux ci-dessus, et si  $f : D \rightarrow E$  est un morphisme de  $R$ -modules libres de rang fini, alors  $\text{im } f$  et  $\text{ker } f$  sont libres de rang fini. De plus,  $\text{ker } f$  est saturé dans  $D$ .*

**Remarque 1.1.3.** *Les anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  ne sont pas de Bézout.*

*Démonstration.* Commençons par  $\tilde{\mathbf{B}}^+$ . Soit  $\beta_1 > \beta_2 > \dots$  une suite convexe décroissante d'éléments de  $\mathbb{Z}[1/p]$  qui converge vers  $\beta > 0$ ; si  $r \in \mathbb{Z}[1/p]$ , écrivons  $Y^r$  pour  $[\tilde{p}^r]$  (rappelons que  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  est un anneau parfait et donc que  $\tilde{p}^r$  est bien déterminé). On pose  $f = \sum_{i \geq 0} p^i Y^{\beta_{2i}}$  et  $g = \sum_{i \geq 0} p^i Y^{\beta_{2i+1}}$ . Supposons que l'idéal de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  engendré par  $f$  et  $g$  est principal, engendré par un élément  $h$ . Cet élément est nécessairement dans  $Y^{\geq \beta} \tilde{\mathbf{B}}^+$ , puisque  $f$  et  $g$  le sont et comme  $\tilde{\mathbf{A}}^+/p$  est intègre, on peut supposer que  $h \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  et que  $I = (f, g) \cap \tilde{\mathbf{A}}^+ = h\tilde{\mathbf{A}}^+$ . On a alors  $\text{val}_{\mathbb{E}}(\tilde{h}) \geq \beta$ . Par ailleurs, on a  $(f - gY^{\beta_0 - \beta_1})/p \in (f, g)$  et cet élément s'écrit  $\sum_{i \geq 0} p^i Y^{\beta_{2i+2}}(1 + O(Y))$  (c'est là qu'on utilise la convexité de la suite) et en itérant ce procédé, on voit que  $I$  contient un élément de la forme  $\sum_{i \geq 0} p^i Y^{\beta_{2i+j}}(1 + O(Y))$  pour tout  $j \geq 0$  et donc que l'image de  $I$  dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  contient des éléments de valuation  $\beta_j$  pour tout  $j \geq 0$ . Ceci entraîne que  $\text{val}_{\mathbb{E}}(\tilde{h}) = \beta$ . Si  $\beta \notin \mathbb{Q}$ , c'est impossible et donc  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  n'est pas de Bézout.

Si  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  était de Bézout, alors il existerait  $h \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  tel que  $(f, g) = h\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  et en utilisant la théorie des polygones de Newton de [Kedlaya 2005, §2.5], on montre que  $h \in \tilde{\mathbf{B}}^+$ . Comme ci-dessus, on peut supposer que  $h \in \tilde{\mathbf{A}}^+ \setminus p\tilde{\mathbf{A}}^+$ . Chacun des éléments  $f_j = \sum_{i \geq 0} p^i Y^{\beta_{2i+j}}(1 + O(Y))$  construits ci-dessus pour  $j \geq 0$  peut donc s'écrire  $f_j = hx_j$  et encore une fois, on a forcément  $x_j \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ . On a alors  $\text{val}_{\mathbb{E}}(\tilde{h}) \leq \text{val}_{\mathbb{E}}(\tilde{f}_j) = \beta_j$  ce qui fait que  $\text{val}_{\mathbb{E}}(\tilde{h}) \leq \beta$ . Par ailleurs, si  $\alpha \in \mathbb{Z}[1/p]$  et  $\alpha < \beta$ , alors  $Y^\alpha$  divise  $f$  et  $g$  ce qui fait que  $(f, g) \subset Y^\alpha \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  et donc aussi que  $h \in Y^\alpha \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ \cap \tilde{\mathbf{A}}^+ = Y^\alpha \tilde{\mathbf{A}}^+$  pour tout  $\alpha < \beta$ . Si  $\beta \notin \mathbb{Q}$ , alors  $\text{val}_{\mathbb{E}}(\tilde{h}) < \beta$  et en choisissant  $\text{val}_{\mathbb{E}}(\tilde{h}) < \alpha < \beta$ , on trouve une contradiction, ce qui fait que  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  n'est pas de Bézout.  $\square$

Une grande partie de l'article [Kedlaya 2005] est consacré à l'étude des  $\varphi$ -modules sur l'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  ou sur l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+$ . On rappelle à présent quelques résultats quant au premier cas (pour le deuxième, voir le paragraphe 1.2).

**Définition 1.1.4.** Si  $h \geq 1$  et  $a \in \mathbb{Z}$  sont deux entiers premiers entre eux, alors le  $\varphi$ -module élémentaire  $M_{a,h}$  est le  $\varphi$ -module de base  $e_0, \dots, e_{h-1}$  avec  $\varphi(e_0) = e_1, \dots, \varphi(e_{h-2}) = e_{h-1}$  et  $\varphi(e_{h-1}) = p^a e_0$  (cf. la définition 4.1.1 de [Kedlaya 2005]; on utilise  $(a, h)$  plutôt que  $(c, d)$  pour être compatible avec les notations de Colmez et de Fontaine).

**Proposition 1.1.5.** *Si  $M$  est un  $\varphi$ -module sur  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ , alors il existe des entiers  $a_i, h_i$  tels que  $M = \bigoplus M_{a_i, h_i}$ .*

*Démonstration.* Étant donnée la définition 4.5.1 de [Kedlaya 2005], c'est le (a) du théorème 4.5.7 du même article.  $\square$

Remarquons que la décomposition n'est pas canonique, mais que l'ensemble des pentes  $s_i = a_i/h_i$  comptées avec multiplicités est canonique (cf. le (c) du théorème



4.5.7 de [Kedlaya 2005]). Les rationnels ainsi obtenus sont les *pent*es de  $M$ .

**Corollaire 1.1.6.** *Si  $M$  est un  $\varphi$ -module sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ , alors  $1 - \varphi : M[1/t] \rightarrow M[1/t]$  est surjective.*

*Démonstration.* Si  $n \geq 0$ , alors  $(1 - \varphi)(t^{-n}x) = t^{-n}(1 - p^{-n}\varphi)(x)$  et il suffit donc de montrer que si  $n \gg 0$ , alors  $1 - p^{-n}\varphi : M \rightarrow M$  est surjectif. Étant donnée la proposition 1.1.5 ci-dessus et le fait que  $M_{a,h}(-n) = M_{a-nh,h}$ , c'est une conséquence immédiate du (b) de la proposition 4.1.3 de [Kedlaya 2005].  $\square$

L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{max}}^{\varphi=1}$  (qui est égal à  $\mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}$ ) occupe une place centrale dans cet article ; il est traditionnellement noté  $\mathbf{B}_e$ . Étant donnée la définition de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ , il est clair que l'on a  $\mathbf{B}_e = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi=1}$ .

**Lemme 1.1.7.** *On a  $\mathbf{B}_e = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi=1}$ .*

*Démonstration.* Si  $x \in \mathbf{B}_e$ , alors  $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi=1} \subset (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi=1}$ . Réciproquement, si  $x \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi=1}$ , alors il existe  $n \geq 0$  tel que  $x = t^n x_n$  avec  $x_n \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{\varphi=p^n}$  et le lemme suit alors de la proposition 3.2 de [Berger 2002] qui nous dit que  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{\varphi=p^n} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{\varphi=p^n}$ .  $\square$

**Lemme 1.1.8.** *On a  $\mathbf{B}_e^{\times} = \mathbb{Q}_p^{\times}$  et si  $z \in \mathbf{B}_e$  engendre un  $\mathbf{B}_e$ -module de rang 1 stable par  $G_K$ , alors  $z \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ .*

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbf{B}_e$  tels que  $xy = 1$  et  $v(x)$  et  $v(y)$  leurs valuations  $t$ -adiques dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ . On a  $v(x) + v(y) = 0$  et comme  $\mathbf{B}_e \cap \text{Fil}^1 \mathbf{B}_{\text{dR}} = 0$ , cela entraîne que  $v(x) = v(y) = 0$ . Le fait que  $\mathbf{B}_e^{\times} = \mathbb{Q}_p^{\times}$  suit alors du fait que  $\mathbf{B}_e \cap \text{Fil}^0 \mathbf{B}_{\text{dR}} = \mathbb{Q}_p$ .

Si  $z \in \mathbf{B}_e$  engendre un  $\mathbf{B}_e$ -module de rang 1 stable par  $G_K$ , alors  $g(z)/z \in \mathbb{Q}_p^{\times}$  si  $g \in G_K$  et l'application  $g \mapsto g(z)/z$  définit un caractère cristallin de  $G_K$ . Un résultat classique (cf. le lemme 5.1.3 de [Fontaine 1994b]) dit qu'un tel  $z \in \mathbf{B}_{\text{max}}$  est de la forme  $t^n z_0$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $z_0 \in \widehat{\mathbb{Q}}_p^{\text{nr}}$  et si en plus  $\varphi(z) = z$ , alors  $z \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ .  $\square$

En première approximation, on peut d'ailleurs penser à  $\mathbf{B}_e$  comme à l'anneau des polynômes  $P(Y) \in \mathbb{C}_p[Y]$  tels que  $P(0) \in \mathbb{Q}_p$ .

**Proposition 1.1.9.** *L'anneau  $\mathbf{B}_e$  est de Bézout.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que si  $f, g \in \mathbf{B}_e$ , alors l'idéal qu'ils engendrent est principal. Soit  $n \geq 0$  tel que  $f, g \in t^{-n}(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{\varphi=p^n}$ . Comme  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  est de Bézout, il existe  $h \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  tel que  $t^n f \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} + t^n g \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} = h \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ . En particulier, il existe  $\alpha, \beta \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  tels que  $t^n f \alpha + t^n g \beta = h$ . En appliquant  $\varphi^{\pm 1}$  à cette relation, on trouve que  $h$  et  $\varphi(h)$  engendrent le même idéal de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ . Par la proposition 3.3.2 de [Kedlaya 2005], on peut (quitte à multiplier  $h$  par une unité) supposer que  $\varphi(h) = p^m h$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  ; on en déduit que l'idéal de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t]$  engendré par  $f$  et  $g$  est engendré par  $h/t^m \in \mathbf{B}_e$ .

Reste à voir que  $h/t^m$  est dans l'idéal de  $\mathbf{B}_e$  engendré par  $f$  et  $g$ . On se ramène à montrer que si  $f, g \in \mathbf{B}_e$  engendrent  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t]$ , alors ils engendrent  $\mathbf{B}_e$ . Soit  $n \geq 0$

tel que  $t^n f, t^n g \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  et  $I$  l'idéal (principal) de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  qu'ils engendrent. Considérons la suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow t^n f \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} \oplus t^n g \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} \rightarrow I \rightarrow 0$ . Le  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ -module  $M$  est fermé et donc libre de rang fini (égal à 1) et c'est un  $\varphi$ -module. En tensorisant la suite exacte par  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t]$  (qui est plat sur  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ ) et en prenant les invariants par  $\varphi$ , on trouve un morceau de suite exacte :  $f \mathbf{B}_e \oplus g \mathbf{B}_e \rightarrow \mathbf{B}_e \rightarrow M[1/t]/(1-\varphi)$  et on conclut par le Corollaire 1.1.6.  $\square$

**Remarque 1.1.10.** L'anneau  $\mathbf{B}_e$  est la réunion pour  $n \geq 0$  des  $t^{-n}(\mathbf{B}_{\text{max}}^+)^{\varphi=p^n}$  et chacun d'entre eux est un espace de Banach. La topologie de  $\mathbf{B}_e$  est celle de la limite inductive, ce qui en fait un espace LF.

Si  $h \geq 1$ , soit  $t_h \in \mathbf{B}_{\text{max}}^+$  l'élément construit dans [Colmez 2002, §9] (c'est une période d'un groupe de Lubin–Tate associé à l'uniformisante  $p$  de  $\mathbb{Q}_{p^h}$ ) et dont les propriétés sont rappelées au début de [Colmez 2003a, §2.4]. On a notamment  $\varphi^h(t_h) = pt_h$  et  $\prod_{j=0}^{h-1} \varphi^j(t_h) \in \mathbb{Q}_p^{\times} \cdot t$ .

**Lemme 1.1.11.** *Si  $h \geq 1$  et  $a \in \mathbb{Z}$ , alors  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi^h=p^a}$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module libre de rang  $h$ .*

*Démonstration.* L'application  $x \mapsto x/t_h^a$  est un isomorphisme de  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi^h=p^a}$  sur  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi^h=1}$ . On se ramène donc au cas  $a=0$ . Si  $\omega \in \mathbb{Q}_{p^h}$  engendre une base normale de  $\mathbb{Q}_{p^h}$  sur  $\mathbb{Q}_p$ , la matrice  $(\varphi^{i+j}(\omega))_{1 \leq i, j \leq h}$  est inversible et l'application de  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t])^{\varphi^h=1}$  dans  $\mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{B}_e$  donnée par  $x \mapsto \sum_{i=0}^{h-1} \varphi^i(\omega) \otimes \varphi^i(x)$  est un isomorphisme, d'où le lemme.  $\square$

L'anneau  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  est muni d'une topologie de Fréchet, qui est définie par des valuations  $V_{[r; s]}$  avec  $s > r$ . On appelle  $\widetilde{\mathbf{B}}^{[r; s]}$  le complété de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  pour la valuation  $V_{[r; s]}$  et  $\mathbf{B}_K^{[r; s]}$  le complété de  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ . Les valuations  $V_{[r; s]}$  et les anneaux  $\widetilde{\mathbf{B}}^{[r; s]}$  ont été définis dans [Berger 2002, §2.1] (où ils sont notés  $\widetilde{\mathbf{B}}_{[r; s]}$ ) et étudiés dans [Colmez 2003a; Kedlaya 2005] (entre autres) mais il faut faire attention au fait que les notations sont différentes. Les valuations sont indexées par des intervalles et si l'on pose  $\rho(r) = (p-1)/pr$ , alors notre intervalle  $[r; s]$  coïncide avec l'intervalle  $[\rho(s); \rho(r)]$  de [Colmez 2003a] et de [Kedlaya 2005].

Voici un tableau récapitulatif de quelques unes des notations :

[Berger 2002]	$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$	$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, \rho(r)}$	$\widetilde{\mathbf{B}}_{[\rho(s); \rho(r)]}$	$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger, \rho(r)}$	$\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, \rho(r)}$	$\mathbf{B}_K^{\dagger, \rho(r)}$
[Colmez 2003a]	$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$	$\widetilde{\mathbf{B}}^{[0; r]}$	—	$\widetilde{\mathbf{B}}^{(0; r]}$	$\mathbf{B}_K^{[0; r]}$	$\mathbf{B}_K^{(0; r]}$
[Kedlaya 2005]	$\Gamma_{\text{an}, \text{con}}^{\text{alg}}$	$\Gamma_{\text{an}, r}^{\text{alg}}$	$\Gamma_{[r; s]}^{\text{alg}}$	$\Gamma_r^{\text{alg}}[1/p]$	$\Gamma_{\text{an}, r}$	$\Gamma_r[1/p]$

L'anneau  $\widetilde{\mathbf{B}}^{[r; s]}$  est muni d'une action de  $G_K$  et la méthode de Sen (cf. [Colmez 2003b] et [Berger et Colmez 2007]) permet de simplifier grandement l'étude des  $\widetilde{\mathbf{B}}^{[r; s]}$ -représentations de  $G_K$ .

**Proposition 1.1.12.** *L'anneau  $\tilde{\Lambda} = \tilde{\mathbf{B}}^{[r;s]}$  vérifie les conditions (TS1), (TS2) et (TS3) de [Berger et Colmez 2007] avec  $\Lambda_{H_K, n} = \varphi^{-n}(\mathbf{B}_K^{[p^n r; p^n s]})$  et  $\text{val}_\Lambda = V_{[r;s]}$ , les constantes  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  et  $c_3 > 1/(p-1)$  pouvant être choisies arbitrairement.*

*Démonstration.* Ceci est démontré dans [Colmez 2003a] : la condition (TS1) résulte du lemme 10.1, la condition (TS2) résulte de la proposition 8.12 et du fait que  $\tilde{\mathbf{B}}_K^{[0; \rho(r)]}$  est dense dans  $\tilde{\mathbf{B}}_K^{[r;s]}$  et la condition (TS3) résulte de la proposition 9.10 et de la même densité.  $\square$

**Lemme 1.1.13.** *Si  $r \gg 0$  et si  $I$  est un intervalle contenu dans  $[r; +\infty[$ , alors  $\mathbf{B}_K^I \cap \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ .*

*Démonstration.* Le corollaire 2.5.7 de [Kedlaya 2005] nous dit que  $x \in \mathbf{B}_K^J$  pour tout intervalle  $I \subset J \subset [r; +\infty[$  ce qui fait que  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ .  $\square$

**1.2. Les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba.** Nous donnons quelques rappels et compléments concernant les résultats de Kedlaya (en essayant de renvoyer systématiquement à [Kedlaya 2005] quand c'est possible) sur les pentes des  $\varphi$ -modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ . Rappelons qu'un  $\varphi$ -module sur un anneau  $R$  est un  $R$ -module libre  $D$  muni d'un Frobenius  $\varphi$  tel que  $\varphi^*(D) = D$ . Si cet anneau est en plus muni d'une action de  $\Gamma_K$ , alors un  $(\varphi, \Gamma)$ -module est un  $\varphi$ -module muni d'une action semi-linéaire et continue de  $\Gamma_K$  qui commute à  $\varphi$ . Nous renvoyons à l'article de Kedlaya pour la notion de pentes des  $\varphi$ -modules. Contentons-nous de dire que si  $D$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  alors ses *pentés* sont les rationnels qui sortent de la proposition 1.1.5 appliquée à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger} D$ .

**Lemme 1.2.1.** *Si  $D$  est un  $\varphi$ -module de rang 1 sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ , alors la pente de  $D$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Cette pente appartient à l'image par  $\text{val}_p$  du corps des coefficients de  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et le lemme suit du fait que ce corps est une extension non ramifiée de  $K_0$ . On peut aussi dire que la pente de  $M_{a,1}$  est  $a \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Définition 1.2.2.** Si  $D$  est un  $\varphi$ -module, son *degré*  $\text{deg } D$  est la pente de  $\det(D)$ .

**Lemme 1.2.3.** *Si  $s \in \mathbb{Q}$ , alors un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  qui est une extension de  $\varphi$ -modules isoclines de pente  $s$  est lui-même isocline de pente  $s$ .*

*Démonstration.* Ecrivons  $s = n/d$  ; si on a une suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$  avec  $D_1$  et  $D_2$  isoclines de pente  $s$ , alors on peut écrire  $D_i = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D_i^\dagger$  où  $D_i^\dagger$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$  admettant une base dans laquelle  $p^{-n} \text{Mat}(\varphi^d) \in \text{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ . Le lemme résulte alors de la proposition 7.4.1 de [Kedlaya 2005] qui nous permet de trouver une base de  $D$  dans laquelle  $p^{-n} \text{Mat}(\varphi^d) \in \text{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ .  $\square$

Rappelons le résultat principal de [Kedlaya 2004] (redémontré et généralisé dans [Kedlaya 2005 ; 2006]).

**Théorème 1.2.4.** *Si  $D$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , alors il existe une unique filtration  $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_\ell = D$  par des sous- $\varphi$ -modules saturés, telle que :*

- (1) *pour tout  $1 \leq i \leq \ell$ , le quotient  $D_i/D_{i-1}$  est isocline ;*
- (2) *si l'on appelle  $s_i$  la pente de  $D_i/D_{i-1}$ , alors  $s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$ .*

**Remarque 1.2.5.** Plaçons-nous dans la situation du Théorème 1.2.4 ci-dessus ; par la proposition 1.1.5, il existe des entiers  $a_j, h_j$  tels que  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D = \bigoplus M_{a_j, h_j}$ . Cette décomposition n'est pas canonique, mais l'ensemble des  $a_j/h_j$  est bien défini et coïncide, si l'on compte les multiplicités, avec l'ensemble des  $s_i$  (cf. le corollaire 6.4.2 de [Kedlaya 2005]).

**Définition 1.2.6.** Si  $D$  est un  $\varphi$ -module de rang  $d$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , alors (cf. [Kedlaya 2004, p. 157]) son *polygone de Newton*  $\text{NP}(D)$  est la réunion des segments d'extrémités  $(i, y_i)$  et  $(i+1, y_{i+1})$  pour  $0 \leq i \leq d-1$  où  $y_0 = 0$  et  $y_{i+1} - y_i$  est la  $(i+1)$ -ième plus petite pente de  $D$  en comptant les multiplicités. Dans les notations du Théorème 1.2.4,  $\text{NP}(D)$  est la réunion des  $\ell$  segments de longueur  $\text{rg}(D_i/D_{i-1})$  et de pente  $s_i$  pour  $1 \leq i \leq \ell$ .

Remarquons que par le Lemme 1.2.1, les sommets de  $\text{NP}(D)$  sont à coordonnées entières. Le dernier sommet est de coordonnées  $(\text{rg}(D), \deg D)$ .

**Lemme 1.2.7.** *Si  $D$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  et si  $M$  est un sous- $\varphi$ -module de  $D$  (pas nécessairement saturé ni de même rang), alors  $\text{NP}(M)$  est au-dessus de  $\text{NP}(D)$ , et si  $\text{NP}(M)$  et  $\text{NP}(D)$  ont même extrémité, alors  $M = D$ .*

*Démonstration.* Si l'on appelle  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$  et  $\tau_1, \dots, \tau_m$  les pentes de  $D$  et  $M$  prises avec multiplicité, l'affirmation «  $\text{NP}(M)$  est au-dessus de  $\text{NP}(D)$  » est équivalente au fait que pour tout  $1 \leq k \leq m$ , on a  $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_k \leq \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_k$ , ce qui revient à dire que pour tout  $1 \leq k \leq m$ , la plus petite pente de  $\bigwedge^k D$  est inférieure ou égale à la plus petite pente de  $\bigwedge^k M$ . Ceci suit, après extension des scalaires à  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ , du (a) de la proposition 4.5.14 de [Kedlaya 2005].

Enfin si  $\text{NP}(M)$  et  $\text{NP}(D)$  ont même extrémité, alors  $M$  et  $D$  ont même rang (le rang étant la  $x$ -longueur du polygone de Newton) et  $\det(M) = \alpha \cdot \det(D)$  où  $\alpha \cdot \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  est étale,  $\text{NP}(M)$  et  $\text{NP}(D)$  ayant la même extrémité. Par la proposition 3.3.2 de [Kedlaya 2005],  $\alpha$  est une unité de  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$  ; c'est donc une unité de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , ce qui fait que  $M = D$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.8.** *Si  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2$  est une suite exacte de  $\varphi$ -modules, avec  $\text{rg}(D) = \text{rg}(D_1) + \text{rg}(D_2)$ , alors  $\deg D \geq \deg D_1 + \deg D_2$  et on a égalité si et seulement si  $D \rightarrow D_2$  est surjective.*

*Démonstration.* Par le Lemme 1.2.7 ci-dessus, on a  $\deg(\text{im}(D \rightarrow D_2)) \geq \deg D_2$  avec égalité si et seulement si  $D \rightarrow D_2$  est surjective. On se ramène donc à montrer que si on a une suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$ , alors  $\deg D = \deg D_2 + \deg D_1$ . Ceci suit du fait que  $\det \text{Mat}(\varphi | D) = \det \text{Mat}(\varphi | D_1) \cdot \det \text{Mat}(\varphi | D_2)$ .  $\square$

Disons encore quelques mots de la « localisation en  $\varepsilon^{(n)} - 1$  » ; si  $n \geq 0$ , alors on pose  $r_n = p^{n-1}(p-1)$ . Si  $x = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r_0}$  alors la série qui définit  $x$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  et on en déduit un morphisme injectif noté  $\iota_0$  de  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r_0}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . Ce morphisme s'étend par continuité en un morphisme toujours injectif (voir la proposition 2.25 de [Berger 2002])  $\iota_0 : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . Si  $r > 0$ , alors soit  $n(r)$  le plus petit entier tel que  $r_n \geq r$ . Si  $n \geq n(r)$ , et si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ , alors  $\varphi^{-n}(x) \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r/p^n} \subset \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0}$  et on en déduit un morphisme injectif  $\iota_n = \iota_0 \circ \varphi^{-n} : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . On pose  $Q_1 = \varphi(X)/X$  et  $Q_n = \varphi^{n-1}(Q_1)$  ce qui fait que si  $n \geq 1$ , alors  $Q_n$  est le polynôme minimal de  $\varepsilon^{(n)} - 1$ . Par la proposition 4.8 de [Berger 2002], l'application  $\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \rightarrow \mathbb{C}_p$  est surjective et son noyau est l'idéal engendré par  $Q_n$ . Par le lemme 5.11 de [Berger 2002], la restriction de  $\iota_n$  à  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$  a pour image un sous-anneau dense (pour la topologie  $t$ -adique) de  $K_n[[t]]$ . Si  $D^r$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ -module, cette application  $\iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r} \rightarrow K_n[[t]]$  nous permet de définir la localisation  $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}} D^r$  de  $D^r$  en  $\varepsilon^{(n)} - 1$  pour  $n \geq n(r)$ . Cette construction est fondamentale autant dans cet article que dans [Berger 2004a].

## 2. Les $B$ -paires

Une  $B$ -paire est un couple  $W = (W_e, W_{\text{dR}}^+)$  où  $W_e$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module libre de rang fini muni d'une action semi-linéaire et continue de  $G_K$  (c'est-à-dire une  $\mathbf{B}_e$ -représentation) et  $W_{\text{dR}}^+$  est un  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -réseau de  $W_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$  stable par  $G_K$  (rappelons que toute  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ -représentation admet un  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -réseau stable par Galois, cf. par exemple le début du §3.5 de [Fontaine 2004]).

L'objet de ce chapitre est d'étudier la catégorie des  $B$ -paires, et le résultat principal est que cette catégorie est équivalente à la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$ .

**2.1. La catégorie des  $B$ -paires.** Ce paragraphe est principalement consacré à donner des définitions relatives à la catégorie des  $B$ -paires.

**Définition 2.1.1.** Si  $W$  est une  $B$ -paire, alors on appelle *dimension de  $W$*  le rang commun de  $W_e$  et de  $W_{\text{dR}}^+$ .

Si  $W$  et  $X$  sont deux  $B$ -paires, un *morphisme de  $B$ -paires*  $f : W \rightarrow X$  est la donnée de deux applications  $(f_e, f_{\text{dR}}^+)$  de  $W_e$  dans  $X_e$  et de  $W_{\text{dR}}^+$  dans  $X_{\text{dR}}^+$  telles que les deux applications induites par extension des scalaires à  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  coïncident ; on appelle alors  $f_{\text{dR}}$  cette application.

**Exemple 2.1.2.** Voici deux classes importantes de  $B$ -paires.

- (1) Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors  $(\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$  est une  $B$ -paire notée  $W(V)$  ;
- (2) si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré sur  $K$ , alors

$$((\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1, N=0}, \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_K D_K))$$

est une  $B$ -paire notée  $W(D)$ .

**Lemme 2.1.3.** *Si  $W$  est une  $B$ -paire de dimension 1, alors il existe un caractère  $\eta : G_K \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times$  et  $i \in \mathbb{Z}$  tels que  $W_e = \mathbf{B}_e(\eta)$  et  $W_{\mathrm{dR}}^+ = t^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(\eta)$ .*

*Démonstration.* La première assertion résulte du Lemme 1.1.8 et la deuxième du fait que les idéaux fractionnaires de  $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$  sont tous de la forme  $t^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ .  $\square$

**Lemme 2.1.4.** *Si  $f : W \rightarrow X$  est un morphisme de  $B$ -paires, alors  $X_e/f_e(W_e)$  est sans torsion.*

*Démonstration.* Le  $\mathbf{B}_e$ -module  $\mathrm{Sat} f_e(W_e)$  est libre de même rang que  $f_e(W_e)$  et le Lemme 1.1.8 montre que  $\det f_e(W_e) = \det \mathrm{Sat} f_e(W_e)$  ce qui fait que l'image de  $f_e(W_e)$  est saturée dans  $X_e$ .  $\square$

**Remarque 2.1.5.** En revanche,  $X_{\mathrm{dR}}^+/f_{\mathrm{dR}}^+(W_{\mathrm{dR}}^+)$  peut avoir de la torsion (considérer par exemple l'application naturelle  $(\mathbf{B}_e, t\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \rightarrow (\mathbf{B}_e, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ ). On dit que  $f$  est *strict* si  $X_{\mathrm{dR}}^+/f_{\mathrm{dR}}^+(W_{\mathrm{dR}}^+)$  est sans torsion. L'existence de morphismes non-stricts implique que la  $\otimes$ -catégorie additive des  $B$ -paires n'est pas abélienne.

**Définition 2.1.6.** Si  $W$  et  $X$  sont deux  $B$ -paires, on dit que  $W$  est un *sous-objet* de  $X$  s'il existe un morphisme injectif strict  $f : W \rightarrow X$ . Une *suite exacte* est une suite où les morphismes sont stricts et les conditions habituelles (image-noyau) sont satisfaites.

**Lemme 2.1.7.** *Si  $f : W \rightarrow X$  est un morphisme de  $B$ -paires, alors  $\ker f = (\ker f_e, \ker f_{\mathrm{dR}}^+)$  est un sous-objet de  $W$  et  $\mathrm{im} f = (\mathrm{im} f_e, \mathrm{im} f_{\mathrm{dR}}^+) \subset X$  est une  $B$ -paire et la suite  $0 \rightarrow \ker f \rightarrow W \rightarrow \mathrm{im} f \rightarrow 0$  est exacte.*

**Définition 2.1.8.** Si  $W$  et  $X$  sont deux  $B$ -paires, on dit que  $W$  est une *modification* de  $X$  si  $W_e \simeq X_e$ .

**2.2. Construction de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.** Dans ce paragraphe, on associe à toute  $B$ -paire un  $(\varphi, \Gamma)$ -module et on montre le théorème A de l'introduction. Les constructions qui permettent de relier la catégorie des  $B$ -paires et celle des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sont proches de celles qu'on trouve dans l'article [Colmez 2003a], notamment les §§2, 3 et 10.

Rappelons que si  $n \geq 0$ , alors on pose  $r_n = p^{n-1}(p-1)$  et que si  $r > 0$ , alors  $n(r)$  est le plus petit entier tel que  $r_n \geq r$ . Si  $W$  est une  $B$ -paire est si  $n \geq n(r)$ , alors l'application  $\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$  nous donne un morphisme  $\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e \rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e = W_{\mathrm{dR}}$ .

**Lemme 2.2.1.** *Si  $W$  est une  $B$ -paire, et si  $\tilde{D}^r(W) = \{y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e \text{ tels que } \iota_n(y) \in W_{\mathrm{dR}}^+ \text{ pour tout } n \geq n(r)\}$ , alors :*

- (1)  $\tilde{D}^r(W)$  est un  $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger, r}$ -module libre de rang  $d$  ;
- (2)  $\tilde{D}^r(W)[1/t] = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$  ;

(3)  $\tilde{D}^r(W)$  est stable par  $G_K$  et  $\varphi(\tilde{D}^r(W)) = \tilde{D}^{pr}(W)$ .

*Démonstration.* Commençons par remarquer que si  $n \geq n(r)$ , alors l'image de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$  par l'application  $\iota_n$  est dense dans  $W_{\text{dR}}^+$ . Soit

$$\tilde{D}_{n(r)}^r(W) = \{y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e \text{ tels que } \iota_{n(r)}(y) \in W_{\text{dR}}^+\};$$

c'est un  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ -module libre de rang  $d$  (il est engendré par  $d$  éléments dont les images forment une base de  $W_{\text{dR}}^+$ ). Par ailleurs  $\tilde{D}^r(W)$  est fermé dans  $\tilde{D}_{n(r)}^r(W)$  et par la proposition 1.1.1,  $\tilde{D}^r(W)$  est libre de rang  $\leq d$ .

Montrons que si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$ , il existe  $m \geq 0$  tel que  $t^m x \in \tilde{D}^r(W)$ , ce qui implique que  $\tilde{D}^r(W)$  est un  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ -module libre de rang  $d$  et que  $\tilde{D}^r(W)[1/t] = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$ . Si  $e_1, \dots, e_d$  est une base de  $W_e$ , alors il existe  $m_1$  tel que pour tout  $n \geq n(r)$ , l'image par  $\iota_n$  des  $t^{m_1} e_i$  appartient à  $W_{\text{dR}}^+$  (si c'est vrai pour un  $n$ , c'est vrai pour tous car  $\varphi(e_i) = e_i$ ). Comme  $\mathbf{B}_e = \bigcup_{j \geq 0} t^{-j} (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger})^{\varphi = p^j}$ , il existe  $m_2$  tel que  $t^{m_2} x$  appartient au  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ -module engendré par les  $e_i$ . On peut alors prendre  $m = m_1 + m_2$ .

Ceci démontre les points (1) et (2), et le (3) est une évidence.  $\square$

**Lemme 2.2.2.** *Pour tout  $n \geq n(r)$ , l'image de  $\tilde{D}^r(W)$  par  $\iota_n$  contient une base de  $W_{\text{dR}}^+$  et si  $\tilde{D}'$  est un sous- $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ -module fermé stable par  $G_K$  de  $\tilde{D}^r(W)$ , dont l'image par  $\iota_n$  contient une base de  $W_{\text{dR}}^+$  pour tout  $n \geq n(r)$ , alors  $\tilde{D}' = \tilde{D}^r(W)$ .*

*Démonstration.* Soient  $n \geq n(r)$  et  $x_1, \dots, x_d$  des éléments de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$  dont les images par  $\iota_n$  forment une base de  $W_{\text{dR}}^+$ . Si  $\ell \geq 0$  est tel que  $t^\ell x_i \in \tilde{D}^r(W)$  pour tout  $i$ , alors posons  $y_i = (t/Q_n)^\ell x_i$ . Pour tout  $m \geq n(r)$  on a  $\iota_m(y_i) \in W_{\text{dR}}^+$  et par ailleurs  $\iota_n(y_i) = \text{inversible} \cdot \iota_n(x_i)$  ce qui fait que l'image de  $\tilde{D}^r(W)$  par  $\iota_n$  contient bien une base de  $W_{\text{dR}}^+$ .

Pour montrer l'unicité, on se ramène au cas de rang 1 en prenant le déterminant. Il faut donc montrer que si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  engendre un idéal stable par  $G_K$  et si  $\iota_n(x)$  est une unité de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  pour tout  $n \geq n(r)$ , alors  $x$  est une unité. Soit  $\eta : G_K \rightarrow (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r})^\times = (\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r})^\times$  le cocycle  $g \mapsto g(x)/x$ . Par la proposition 4.2.1 de [Berger et Colmez 2007], l'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  satisfait les conditions de Tate–Sen et il existe donc une extension finie  $L$  de  $K$ , un entier  $m \geq 0$  et une unité  $y \in (\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r})^\times$  tels que  $h(xy) = xy$  si  $h \in H_L$  et  $g(xy)/xy \in \varphi^{-m}(\mathbf{B}_L^{\dagger, p^m r})$  si  $g \in G_K$ . Le lemme 3.2.5 de [Berger et Colmez 2007] montre alors que, quitte à augmenter  $m$ , on a  $xy \in \varphi^{-m}(\mathbf{B}_L^{\dagger, p^m r})$ . Si  $L_0 \subset L$  est une sous-extension non ramifiée de  $L$ , alors  $N_{L/L_0}(\varphi^m(xy))$  est un élément de  $\mathbf{B}_{L_0}^{\dagger, p^m r}$  qui engendre un idéal stable par un sous-groupe ouvert de  $\Gamma_L$ . Un raisonnement analogue à celui du lemme I.3.2 de [Berger 2004b] montre que cet idéal est engendré par un élément de la forme  $\prod_{n \geq n(r)} (Q_{n+m}/p)^{\alpha_n}$  et la condition selon laquelle  $\iota_n(x)$  est une unité de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  pour tout  $n \geq n(r)$  nous dit que les  $\alpha_n$  sont tous nuls, ce qui fait que  $\varphi^m(xy)$  est une unité, et donc que  $x$  est une unité.  $\square$

En particulier, si  $s \geq r$ , alors l'application naturelle  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, s} \otimes_{\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}} \tilde{\mathbf{D}}^r(W) \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}^s(W)$  est un isomorphisme.

**Définition 2.2.3.** On définit  $\tilde{\mathbf{D}}(W) = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} \otimes_{\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}} \tilde{\mathbf{D}}^r(W)$  et si  $I$  est un intervalle contenu dans  $[r; +\infty[$ , alors on pose  $\tilde{\mathbf{D}}^I(W) = \tilde{\mathbf{B}}^I \otimes_{\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}} \tilde{\mathbf{D}}^r(W)$ .

Le Lemme 2.2.2 ci-dessus montre que cela ne dépend pas du choix de  $r \in I$ . Remarquons en particulier que si  $J \subset I$ , alors  $\tilde{\mathbf{D}}^J(W) = \tilde{\mathbf{B}}^J \otimes_{\tilde{\mathbf{B}}^I} \tilde{\mathbf{D}}^I(W)$ .

**Proposition 2.2.4.** Si  $W$  est une  $B$ -paire, et si  $I$  est un intervalle, alors il existe  $j \geq 0$  et une extension finie  $L$  de  $K$  tels que pour tout  $k \geq 0$ , il existe un  $\mathbf{B}_L^{p^{j+k}I}$ -module  $\mathbf{D}_L^{p^{j+k}I}$  libre de rang fini vérifiant :

- (1)  $\tilde{\mathbf{B}}^{p^{j+k}I} \otimes_{\mathbf{B}_L^{p^{j+k}I}} \mathbf{D}_L^{p^{j+k}I} = \tilde{\mathbf{D}}^{p^{j+k}I}(W)$  ;
- (2)  $\varphi^*(\mathbf{D}_L^{p^{j+k}I}) = \mathbf{D}_L^{p^{j+k+1}I}$  ;
- (3) les images de  $\mathbf{D}_L^{p^{j+k}I}$  et  $\mathbf{D}_L^{p^{j+k+1}I}$  dans  $\tilde{\mathbf{D}}^{p^{j+k}I \cap p^{j+k+1}I}(W)$  engendrent le même  $\mathbf{B}_L^{p^{j+k}I \cap p^{j+k+1}I}$ -module.

*Démonstration.* Si l'on se donne une base de  $\tilde{\mathbf{D}}^I(W)$ , alors l'action de  $G_K$  est donnée par une application  $G_K \rightarrow \text{GL}_d(\tilde{\mathbf{B}}^I)$  et il existe une extension finie  $L$  de  $K$  telle que l'image de  $G_L$  par cette application soit incluse dans l'ensemble des matrices  $M$  vérifiant  $V_I(1 - M) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$ . Par la proposition 1.1.12,  $\tilde{\mathbf{B}}^I$  satisfait les conditions de Tate–Sen et la proposition 3.2.6 de [Berger et Colmez 2007] nous fournit alors une nouvelle base de  $\tilde{\mathbf{D}}^I(W)$  et  $n \geq 0$  tels que l'application  $G_K \rightarrow \text{GL}_d(\tilde{\mathbf{B}}^I)$  est triviale sur  $H_L$  et à valeurs dans  $\text{GL}_d(\varphi^{-n}(\mathbf{B}_L^{p^n I}))$ . Si  $\mathbf{D}_L^{p^n I}$  est le  $\mathbf{B}_L^{p^n I}$ -module engendré par  $\varphi^n$  de cette base, alors  $\tilde{\mathbf{D}}^{p^n I}(W) = \tilde{\mathbf{B}}^{p^n I} \otimes_{\mathbf{B}_L^{p^n I}} \mathbf{D}_L^{p^n I}$ .

Posons  $J = p^n I \cap p^{n+1} I$  et  $\mathbf{D}_L^{p^{j+k+1}I} = \varphi^*(\mathbf{D}_L^{p^{j+k}I})$  pour  $k \geq 0$ . Si  $J$  est vide, alors il suffit de prendre  $j = n$ , les conditions (1) et (2) étant vérifiées et la condition (3) vide. Supposons donc que  $J$  est non vide ; l'unicité dans la méthode de Sen (cf. la démonstration du (3) de la proposition 3.3.1 de [Berger et Colmez 2007]) ne nous donne pas la condition (3), mais nous dit qu'il existe  $m \geq 0$  tel que :

$$\varphi^{-m}(\mathbf{B}_L^{p^m J}) \otimes_{\mathbf{B}_L^{p^n I}} \mathbf{D}_L^{p^n I} = \varphi^{-m}(\mathbf{B}_L^{p^m J}) \otimes_{\mathbf{B}_L^{p^{n+1}I}} \mathbf{D}_L^{p^{n+1}I}.$$

En appliquant  $\varphi^m$  à cette relation, on voit que (3) est satisfaite en prenant  $j = m + n$ .  $\square$

**Proposition 2.2.5.** Si  $W = (W_e, W_{\text{dR}}^+)$  est une  $B$ -paire de dimension  $d$ , alors il existe un unique  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}(W)$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$  tel que  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}} \mathbf{D}(W) = \tilde{\mathbf{D}}(W)$ .

*Démonstration.* Choisissons un intervalle  $I$  tel que  $I \cap pI$  est non vide. Le (3) de la proposition 2.2.4 nous fournit une collection compatible de  $\mathbf{B}_L^{p^{j+k}I}$ -modules, et par



la définition 2.8.1 et le théorème 2.8.4 de [Kedlaya 2005], il existe un  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger$ -module  $D_L(W)$  libre de rang  $d$  et tel que  $D_L^{p^{j+k}I} = \mathbf{B}_L^{p^{j+k}I} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger} D_L(W)$  pour  $k \geq 0$ . La condition (1) implique que  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger} D_L(W) = \tilde{D}(W)$  et la condition (2) implique que  $D_L(W)$  est un  $\varphi$ -module. Par ailleurs  $D_L(W)$  est stable sous l'action de  $G_K$  et  $H_L$  agit trivialement dessus, puisque c'est vrai pour chaque  $D_L^{p^{j+k}I}$ . Finalement, le lemme 4.2.5 de [Berger et Colmez 2007] montre que l'extension  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger/\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  vérifie les conditions de la proposition 2.2.1 de descente étale du même article, ce qui fait que l'on a  $D_L(W) = \mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D_L(W)^{H_K}$  et on peut donc prendre  $D(W) = D_L(W)^{H_K}$ . Ceci montre l'existence de  $D(W)$ .

Passons à l'unicité. Si  $D_1$  et  $D_2$  satisfont les conclusions de la proposition, choisissons des bases de  $D_1$  et  $D_2$ , et appelons  $G_i$  la matrice de  $\gamma \in \Gamma_K$  sur  $D_i$  et  $M$  la matrice de passage d'une base à l'autre, ce qui fait que  $G_1 M = \gamma(M) G_2$ . On se donne  $r \gg 0$  tel que toutes ces matrices ont leurs coefficients dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  et  $I$  un intervalle contenu dans  $[r; +\infty[$ . La partie « unicité » de la méthode de Sen nous dit qu'il existe  $n \geq 0$  tel que  $M \in \text{GL}_d(\varphi^{-n}(\mathbf{B}_K^{p^n I}))$ . Comme  $\mathbf{B}_K^{p^n I} \cap \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,p^n r} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^n r}$  par le Lemme 1.1.13, on trouve que  $M \in \text{GL}_d(\varphi^{-n}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^n r}))$ . Si  $P_1$  et  $P_2$  sont les matrices de  $\varphi$  sur  $D_1$  et  $D_2$ , alors  $P_1 M = \varphi(M) P_2$  et donc si  $M \in \text{GL}_d(\varphi^{-n}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,p^n r}))$ , alors  $M \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger)$ , ce qui fait que  $D_1 = D_2$ .  $\square$

Rappelons que si  $D$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , alors pour  $r \gg 0$  on note  $D^r$  le  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ -module fourni par le théorème I.3.3 de [Berger 2004a]. En particulier

$$D^{pr} = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,pr} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D^r$$

et  $D^{pr}$  a une base contenue dans  $\varphi(D^r)$ . Par exemple,  $D^r(W) = \tilde{D}^r(W) \cap D(W)$  si  $r \gg 0$ .

**Proposition 2.2.6.** *Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module de rang  $d$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , alors :*

- (1)  $W_e(D) = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D)^{\varphi=1}$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module libre de rang  $d$  stable sous l'action de  $G_K$  ;
- (2)  $W_{\text{dR}}^+(D) = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n}} D^{r_n}$  ne dépend pas de  $n \gg 0$  et c'est un  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -module libre de rang  $d$  stable sous l'action de  $G_K$  ;
- (3) le couple  $W(D) = (W_e(D), W_{\text{dR}}^+(D))$  est une  $B$ -paire.

*Démonstration.* Il est clair que  $W_e(D)$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module stable sous l'action de  $G_K$ . Reste à montrer qu'il est libre de rang  $d$ . Pour cela, soit  $\bigoplus M_{a_i, h_i}$  une décomposition de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D$  en  $\varphi$ -modules élémentaires fournie par la proposition 1.1.5. On a  $W_e(D) = \bigoplus (M_{a_i, h_i}[1/t])^{\varphi=1}$ . On vérifie que l'application  $(M_{a, h}[1/t])^{\varphi=1} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger[1/t]$  qui à  $\sum_{i=0}^{h-1} x_i e_i$  associe  $x_0$  est un isomorphisme entre  $(M_{a, h}[1/t])^{\varphi=1}$  et  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger[1/t])^{\varphi^h = p^{-a}}$ , et le (1) suit alors du Lemme 1.1.11.

Pour montrer le (2), remarquons que par le théorème I.3.3 de [Berger 2004a], on a  $\varphi^*(D^{r_n}) = D^{r_{n+1}}$  pour  $n \gg 0$  et donc le  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -module engendré par  $\varphi^{-n}(D^{r_n})$

ne dépend pas de  $n \gg 0$ . Comme  $D^{r_n}$  est libre de rang  $d$  et stable par  $G_K$ , il en est de même pour  $W_{\text{dR}}^+(\mathbb{D})$ .

Montrons maintenant le (3) :  $W_{\text{dR}}(\mathbb{D}) = \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e(\mathbb{D})$  est un  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ -espace vectoriel de dimension  $d$ , réunion croissante des  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ -espaces vectoriels

$$\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}} D^{r_n})^{\varphi=1}$$

ce qui fait que si  $n \gg 0$ , alors :

$$W_{\text{dR}}(\mathbb{D}) = \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}} D^{r_n})^{\varphi=1} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}} D^{r_n} = \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{dR}}^+} W_{\text{dR}}^+(\mathbb{D}).$$

En comparant les dimensions, on voit que l'on a en fait égalité et donc que  $W_{\text{dR}}^+(\mathbb{D})$  est un réseau de  $W_{\text{dR}}(\mathbb{D})$ .  $\square$

**Théorème 2.2.7.** *Les foncteurs  $W \mapsto D(W)$  et  $D \mapsto W(\mathbb{D})$  sont inverses l'un de l'autre et donnent une équivalence de catégories entre la catégorie des  $B$ -paires et la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$ .*

*Démonstration.* On vérifie que ces deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre en utilisant le fait que :

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}} D(W) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W$$

dans la proposition 2.2.5 et que :

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e(\mathbb{D}) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}} D$$

dans la proposition 2.2.6, puis en identifiant les différents objets (c'est un exercice instructif que nous laissons au lecteur ; il faut utiliser l'unicité dans la proposition 2.2.5).  $\square$

**Remarque 2.2.8.** Les modifications de  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules correspondent à des modifications de  $B$ -paires. Par exemple :

- (1) Si  $W$  et  $X$  sont deux  $B$ -paires, alors  $W_e \simeq X_e$  si et seulement si  $D(W)[1/t] \simeq D(X)[1/t]$  ;
- (2) si  $W = (W_e, W_{\text{dR}}^+)$  est une  $B$ -paire, alors  $D((W_e, t^n W_{\text{dR}}^+)) = t^n D(W)$ .

**Proposition 2.2.9.** *Le foncteur  $D \mapsto W(\mathbb{D})$  réalise une équivalence de catégories entre la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales et la catégorie des  $B$ -paires de la forme  $W(V) = (\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$  où  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ .*

On retrouve alors (en appliquant le (b) du théorème 6.3.3 de [Kedlaya 2005], qui nous dit que le foncteur naturel de la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales sur  $\mathbf{B}_K^{\dagger}$  vers la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$  est une équivalence de catégories) le résultat principal de [Cherbonnier et Colmez 1998], c'est-à-dire l'équivalence de catégories entre représentations  $p$ -adiques et  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales, avec une démonstration proche de celle de [Berger et Colmez 2007].

Dans le paragraphe 3.2, nous reviendrons sur le problème de la description « explicite » des  $B$ -paires dont le  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé est isocline.

**2.3. Théorie de Hodge  $p$ -adique.** Dans ce paragraphe, nous généralisons les notions habituelles de théorie de Hodge  $p$ -adique aux  $B$ -paires.

**Définition 2.3.1.** Si  $\heartsuit \in \{\text{cris, st, dR}\}$ , et si  $W$  est une  $B$ -paire, alors on dit que  $W$  est *cristalline* (ou *semi-stable* ou *de de Rham*) si la  $\mathbf{B}_{\heartsuit}$ -représentation  $\mathbf{B}_{\heartsuit} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$  est triviale. On pose  $D_{\heartsuit}(W) = (\mathbf{B}_{\heartsuit} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e)^{G_K}$ .

Remarquons que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors bien sûr  $V$  est cristalline (ou semi-stable, ou de de Rham, ou de Hodge–Tate) si et seulement si  $W(V)$  l’est.

**Lemme 2.3.2.** Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module sur  $K_0$ , alors  $(\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1, N=0}$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module libre de rang  $d = \dim D$ .

*Démonstration.* Si  $u \in \mathbf{B}_{\text{st}}$  vérifie  $N(u) = 1$ , alors on a  $\mathbf{B}_{\text{st}} = \mathbf{B}_{\text{max}}[u]$  et si  $x \in (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ , alors on peut écrire  $x = x_0 + ux_1 + \dots + u^e x_e$  avec  $x_i \in \mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{K_0} D$ . Par la proposition 11.7 de [Colmez 2002], l’application  $x \mapsto x_0$  de  $(\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{N=0}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{K_0} D$  est un isomorphisme, et on se ramène donc à montrer que si  $D$  est un  $\varphi$ -module sur  $K_0$ , alors  $(\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$  est un  $\mathbf{B}_e$ -module libre de rang  $d$ . Par le théorème de Dieudonné–Manin,  $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\text{nr}} \otimes_{K_0} D$  se décompose en somme directe de  $\varphi$ -modules élémentaire  $M_{a_i, h_i}$ . L’application  $x = \sum_{j=0}^{h-1} x_j e_j \mapsto x_0$  de  $(\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\text{nr}}} M_{a, h})^{\varphi=1}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{max}}^{\varphi^h = p^{-a}}$  est un isomorphisme, et le lemme résulte alors du Lemme 1.1.11.  $\square$

**Proposition 2.3.3.** Si  $W$  est une  $B$ -paire, alors :

- (1)  $D_{\text{st}}(W)$  est un  $(\varphi, N)$ -module sur  $K_0$  et  $D_{\text{cris}}(W) = D_{\text{st}}(W)^{N=0}$ ;
- (2)  $D_{\text{dR}}(W)$  est un  $K$ -espace vectoriel filtré avec  $\text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(W)) = D_{\text{dR}}(W) \cap t^i W_{\text{dR}}^+$  et l’application naturelle  $K \otimes_{K_0} D_{\text{st}}(W) \rightarrow D_{\text{dR}}(W)$  est injective ;
- (3) si  $W$  est semi-stable, alors

$$W_e = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D_{\text{st}}(W))^{\varphi=1, N=0} \quad \text{et} \quad W_{\text{dR}}^+ = \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_K D_{\text{dR}}(W));$$

- (4) si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -modules filtré, et si  $W_e(D) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1, N=0}$  et  $W_{\text{dR}}^+(D) = \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_K D)$ , alors  $W(D) = (W_e(D), W_{\text{dR}}^+(D))$  est une  $B$ -paire semi-stable.

On laisse la démonstration au lecteur à titre d’exercice (ce n’est pas différent du cas des représentations  $p$ -adiques semi-stables).

A la lumière du Théorème 2.2.7, l’étude des  $B$ -paires de de Rham revient à l’étude des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules « localement triviaux » au sens de [Berger 2004a], ce qui est fait en détail dans le même article.

Si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré, on note  $\mathcal{M}(D)$  le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module construit dans [Berger 2004a, §II.2]. Rappelons que :

$$\mathcal{M}(D) = \{y \in (\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}[\log X, 1/t] \otimes_{K_0} D)^{N=0} \mid \iota_n(y) \in \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K) \forall n \gg 0\}.$$

**Proposition 2.3.4.** *Les foncteurs  $W \mapsto D_{\text{st}}(W)$  et  $D \mapsto W(D)$  sont inverses l'un de l'autre et donnent une équivalence de catégories entre la catégorie des  $B$ -paires semi-stables et la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés.*

*Si  $W$  est une  $B$ -paire, alors  $D(W) = \mathcal{M}(D_{\text{st}}(W))$  et donc si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module filtré, alors  $W(D) = W(\mathcal{M}(D))$ .*

*Démonstration.* Ces affirmations ne présentent aucune difficulté.  $\square$

**Théorème 2.3.5.** *Le théorème de monodromie  $p$ -adique et le théorème « faiblement admissible implique admissible » sont vrais. De fait,*

- (1) *toute  $B$ -paire de de Rham est potentiellement semi-stable ;*
- (2) *le foncteur  $W \mapsto D_{\text{st}}(W)$  réalise une équivalence de catégories entre la catégorie des objets de la forme  $W(V)$  où  $V$  est une représentation  $p$ -adique semi-stable et la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules filtrés admissibles.*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord le (1). Soit  $W$  une  $B$ -paire et  $D(W)$  le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module associé. Si  $W$  est de de Rham, alors pour  $n \gg 0$ , la  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ -représentation

$$\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}} D^{r_n}(W)$$

est égale à  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$  et donc triviale, ce qui fait par le théorème 3.9 de [Fontaine 2004] que le  $K_{\infty}((t))$ -module à connexion  $K_{\infty}((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}} D^{r_n}(W)$  est trivial. Étant donnée la définition III.1.2 de [Berger 2004a], on est en mesure d'en appliquer le théorème A du même article, qui nous dit qu'il existe une extension finie  $L$  de  $K$  et un  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D$  sur  $L$  tels que  $D(W|_L) = \mathcal{M}(D)$  et donc que  $W|_L$  est semi-stable. Ceci montre le (1). Le (2) suit du théorème A de [Colmez et Fontaine 2000] ou bien (si l'on préfère passer par les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules) du théorème B de [Berger 2004a].  $\square$

Rappelons que si  $U$  est une  $\mathbb{C}_p$ -représentation de  $G_K$ , alors la réunion  $U_{\text{fini}}^{H_K}$  des sous- $K_{\infty}$ -espaces vectoriels de dimension finie stables par  $\Gamma_K$  de  $U^{H_K}$  a la propriété que l'application  $\mathbb{C}_p \otimes_{K_{\infty}} U_{\text{fini}}^{H_K} \rightarrow U$  est un isomorphisme [Sen 1980]. L'espace  $U_{\text{fini}}^{H_K}$  est muni de l'application  $K_{\infty}$ -linéaire  $\nabla_U = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$  avec  $\gamma \in \Gamma_K \setminus \{1\}$  suffisamment proche de 1.

**Définition 2.3.6.** Si  $W$  est une  $B$ -paire, alors  $W_{\text{dR}}^+ / t W_{\text{dR}}^+$  est une  $\mathbb{C}_p$ -représentation de  $G_K$  et on pose  $D_{\text{Sen}}(W) = (W_{\text{dR}}^+ / t W_{\text{dR}}^+)_{\text{fini}}^{H_K}$ . On pose  $\Theta_{\text{Sen}} = \nabla_W$  et on dit que  $W$  est de Hodge–Tate si  $\Theta_{\text{Sen}}$  est diagonalisable à valeurs propres appartenant à  $\mathbb{Z}$ . Ces entiers sont les *poinds de Hodge–Tate* de  $W$ .

### 3. Les $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Étant donné le Théorème 2.2.7, l'étude des  $B$ -paires revient à l'étude des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Dans ce chapitre, on montre plusieurs résultats sur les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules : modification, classification des objets isoclines, classification des objets de hauteur finie.

**3.1. Modification de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.** Si  $D$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et si  $n \geq n(r)$  avec  $r \gg 0$ , rappelons que  $D^r/Q_n$  est un  $K_n$ -espace vectoriel de dimension  $\text{rg}(D)$ . Soit  $M = \{M_n\}_{n \geq n(r)}$  une famille  $\varphi$ -compatible de sous- $K_n$ -espaces vectoriels de  $D^r/Q_n$ , c'est-à-dire que pour tout  $n \geq n(r)$ ,  $M_{n+1}$  est engendré par les  $\varphi(y)$  où  $y \in D^r$  est tel que son image dans  $D^r/Q_n$  appartient à  $M_n$ . En d'autres termes, on a un isomorphisme  $K_{n+1} \otimes_{K_n} (D^r/Q_n) \rightarrow D^{pr}/Q_{n+1}$  obtenu en quotientant l'isomorphisme  $\varphi^*(D^r) \simeq D^{pr}$  par  $\varphi(Q_n) = Q_{n+1}$ , et qui est donc donné par  $\alpha \otimes \bar{m} \mapsto \alpha \otimes \overline{\varphi(m)}$  et on demande que  $M_{n+1}$  soit l'image de  $K_{n+1} \otimes_{K_n} M_n$  par cet isomorphisme (voir [Berger 2004a, §II.1] pour une condition analogue).

**Définition 3.1.1.** Une telle famille  $M = \{M_n\}_{n \geq n(r)}$  de sous-espaces vectoriels de  $D^r/Q_n$  est appelée une *donnée de modification* de  $D$ . On définit alors  $D[M] = \{y \in D \text{ dont l'image dans } D^r/Q_n \text{ appartient à } M_n\}$ .

**Proposition 3.1.2.** Si  $D$  est un  $\varphi$ -module de rang  $d$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et si  $M$  est une donnée de modification, alors  $D[M]$  est un  $\varphi$ -module et de plus :

- (1) si  $M \subset N$ , alors  $D[M] \subset D[N]$  et si  $D[M] = D[N]$ , alors  $M = N$  ;
- (2)  $D[M] = D$  si  $M_n = D^r/Q_n$  pour tout  $n$ , et  $D[0] = t \cdot D$  ;
- (3)  $\text{deg } D[M] = \text{deg } D + d - \dim M$  ;
- (4) si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module et si  $M$  est stable par  $\Gamma_K$ , alors  $D[M]$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module.

*Démonstration.* Rappelons que  $t = \log(1 + X) = X \cdot \prod_{n \geq 0} Q_n/p$  ce qui fait que  $t \cdot D \subset D[M]$  quel que soit  $M$ . La définition de  $D[M]$  implique que c'est un sous-module fermé de  $D$ , et comme il contient  $t \cdot D$ , il est libre de rang  $d$ . Le fait que c'est un  $\varphi$ -module résulte du fait que la famille des  $M_n$  est  $\varphi$ -compatible.

Le fait que si  $M \subset N$ , alors  $D[M] \subset D[N]$  est évident. Remarquons que si l'image de  $x \in D$  appartient à  $M_n$ , alors  $x \cdot t/Q_n \in D[M]$  et son image dans  $D^r/Q_n$  est (un multiple de)  $x$  ce qui fait que l'image de  $D[M]$  dans  $D^r/Q_n$  est  $M_n$  et en particulier que si  $D[M] = D[N]$ , alors  $M = N$ . Ceci montre le (1). Le (2) est une évidence.

Pour montrer le (3), prenons un drapeau  $\{0\} = M^{(0)} \subset M^{(1)} \subset \dots \subset M^{(d)}$  tel que  $M^{(\dim M)} = M$ . On en déduit une suite de  $\varphi$ -modules  $t \cdot D = D^{(0)} \subset \dots \subset D^{(d)} = D$  et donc une suite de  $\varphi$ -modules de rang 1 :

$$\det(t \cdot D) = \det(D^{(0)}) \subset \dots \subset \det(D^{(d)}) = \det(D).$$

Leurs pentes forment une suite strictement décroissante (si on a égalité des pentes, on a égalité des modules par le Lemme 1.2.7) de  $d + 1$  nombres entiers (ils sont entiers par le Lemme 1.2.1) dont le premier est  $d + \deg D$  et le dernier est  $\deg D$ , ce qui fait que  $\deg(D^{(m)})$  est forcément  $\deg D + d - \dim M$ . Enfin, le (4) est une évidence.  $\square$

**Proposition 3.1.3.** *Si  $M$  est une donnée de modification de  $D$  et si l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$ , alors :*

- (1)  $\{M_n \cap D_1^r / Q_n\}$  est une donnée de modification pour  $D_1$  et  $\{\text{im}(M_n \rightarrow D_2^r / Q_n)\}$  est une donnée de modification pour  $D_2$  ;
- (2) on a une suite exacte  $0 \rightarrow D_1[M] \rightarrow D[M] \rightarrow D_2[M] \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* Le (1) suit du fait que les  $M_n$  sont  $\varphi$ -compatibles et que les  $D_i^r / Q_n$  le sont aussi. Passons au (2) ; on a clairement une suite exacte  $0 \rightarrow D_1[M] \rightarrow D[M] \rightarrow D_2[M]$ . Par le (3) de la proposition 3.1.2, on a :

- (1)  $\deg D_1[M] = \deg D_1 + \dim D_1 - \dim(M_n \cap D_1^r / Q_n)$  ;
- (2)  $\deg D[M] = \deg D + \dim D - \dim M_n$  ;
- (3)  $\deg D_2[M] = \deg D_2 + \dim D_2 - \dim(\text{im}(M_n \rightarrow D_2^r / Q_n))$ .

On en déduit que  $\deg D[M] = \deg D_1[M] + \deg D_2[M]$ , et le Corollaire 1.2.8 implique alors que la suite  $0 \rightarrow D_1[M] \rightarrow D[M] \rightarrow D_2[M] \rightarrow 0$  est exacte.  $\square$

**Remarque 3.1.4.** Si  $M$  et  $N$  sont deux données de modification telles que  $M \cap N = 0$ , alors on a un isomorphisme  $D[M][N] = D[M \oplus N]$  (il y a une inclusion évidente ; comparer les degrés).

**Théorème 3.1.5.** *Si  $D$  est un  $\varphi$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ , alors il existe un  $\varphi$ -module étale  $D' \subset D[1/t]$  tel que  $D'[1/t] = D[1/t]$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'il existe un nombre fini de modifications successives (au sens de la proposition 3.1.2) de  $D$  dont le résultat est isocline de pente entière (si  $D$  est isocline de pente  $s$ , alors  $t \cdot D$  est isocline de pente  $s + 1$ ). Remarquons que si on a une suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$ , alors il est toujours possible de modifier  $D_1$  ou  $D_2$  sans toucher à l'autre, en choisissant  $M$  convenablement.

Étape 1 : si  $D$  est isocline, alors  $D$  se modifie en une extension successive de  $\varphi$ -modules de pentes entières. En effet, si  $D$  est isocline, modifions le par un  $M$  de codimension 1 ce qui augmente le degré de  $D$  de 1. Si  $D[M]$  est isocline de pente non entière, alors on répète cette opération. Le résultat est donc, après un nombre fini de modifications, que  $D$  devient isocline de pente entière (et on a terminé l'étape 1) ou bien que  $D$  se casse en deux morceaux. Dans ce dernier cas, on a terminé par récurrence sur la dimension de  $D$ .

Etape 2 : si  $D$  est extension successive de  $\varphi$ -modules de pentes entières, alors il se modifie en un  $\varphi$ -module isocline de pente entière. On se ramène au cas d'une extension de deux  $\varphi$ -modules de pentes entières  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$  avec  $D_i$  isocline de pente  $s_i$ . Dans ce cas :

- (1) si  $s_2 = s_1$ , alors on a terminé par le Lemme 1.2.3 ;
- (2) si  $s_2 < s_1$ , alors la modification est facile à écrire : on remplace  $D$  par  $D'$ , l'ensemble des  $y \in D$  dont l'image dans  $D_2$  appartient à  $t^{s_1-s_2}D_2$ , ce qui fait que l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D' \rightarrow t^{s_1-s_2}D_2 \rightarrow 0$  et on a terminé par le Lemme 1.2.3 ;
- (3) si  $s_1 < s_2$ , alors on modifie  $D$  par une donnée nulle sur  $D_1$  et surjective sur  $D_2$  ce qui augmente  $s_1$  de 1 et on itère cette opération  $s_2 - s_1$  fois.  $\square$

**Corollaire 3.1.6.** *Si  $W_e$  est une  $\mathbf{B}_e$ -représentation de  $G_K$ , alors il existe une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $H_K$  telle que la restriction de  $W_e$  à  $H_K$  est isomorphe à  $\mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ .*

*Démonstration.* Soit  $W_{\text{dR}}^+$  un  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ -réseau stable par  $G_K$  de  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e$  et  $D = D(W)$  le  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module associé à la  $B$ -paire  $W = (W_e, W_{\text{dR}}^+)$  par le Théorème 2.2.7. Par le Théorème 3.1.5, il existe un  $\varphi$ -module étale  $D' \subset D[1/t]$  tel que  $D'[1/t] = D[1/t]$ . Comme  $D'$  est étale, le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $V = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D')^{\varphi=1}$  est une représentation de  $H_K$  dont la dimension est le rang de  $D'$ . On a alors :

$$W_e = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D)^{\varphi=1} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D')^{\varphi=1} = \mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V,$$

et le corollaire est démontré.  $\square$

**Remarque 3.1.7.** (1) Dans le Corollaire 3.1.6 ci-dessus, on est loin d'avoir unicité. Par exemple, si  $D$  est un  $(\varphi, N)$ -module sur  $K_0$  et si  $W_e = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1, N=0}$ , alors  $W_e = \mathbf{B}_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$  pour toute représentation  $V$  qui s'obtient comme  $V_{\text{st}}(D)$  à partir d'une filtration admissible sur  $K \otimes_{K_0} D$  ;

- (2) Dans la première version de cet article, j'affirmais que si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , alors il existe une extension finie  $L$  de  $K$  et un  $(\varphi, \Gamma_L)$ -module étale  $D'$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger$  tel que  $D' \subset \mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D$  et  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D' = \mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D$ . Ceci est incorrect, et Kiran Kedlaya et Ruochuan Liu ont construit le contre-exemple suivant : soient  $p \neq 2$ ,  $K = \mathbb{Q}_p$  et  $D$  une extension non-triviale de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  par  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger(p^{-2})$  (ce qui veut dire que l'action de  $\Gamma_K$  est inchangée et que  $\varphi$  est multiplié par  $p^{-2}$ ). En utilisant le théorème de filtration par les pentes de Kedlaya et les calculs de cohomologie de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de [Colmez 2007] et de [Liu 2007], on peut montrer qu'une telle extension non-triviale existe et que quelque soit l'extension finie  $L$  de  $K$ ,  $\mathbf{B}_{\text{rig},L}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D$  ne contient pas de sous- $(\varphi, \Gamma_L)$ -module étale de rang 2 et donc qu'un  $D'$  comme ci-dessus n'existe pas.

**3.2. Classification des objets isoclines.** Le Théorème 2.2.7 nous donne une filtration sur les  $B$ -paires, et il est intéressant de décrire les  $B$ -paires correspondant aux  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules isoclines. Le cas étale relève de la proposition 2.2.9.

**Définition 3.2.1.** Si  $h \geq 1$  et  $a \in \mathbb{Z}$  sont premiers entre eux, soit  $\text{Rep}(a, h)$  la catégorie dont les objets sont les  $\mathbb{Q}_{p^h}$ -espaces vectoriels  $V_{a,h}$  de dimension finie, munis d'une action semi-linéaire de  $G_K$  et d'un Frobenius lui aussi semi-linéaire  $\varphi : V_{a,h} \rightarrow V_{a,h}$  qui commute à  $G_K$  et qui vérifie  $\varphi^h = p^a$ . Les morphismes sont ceux que l'on imagine.

**Remarque 3.2.2.** (1) Si  $V_{a,h} \in \text{Rep}(a, h)$ , alors  $\dim_{\mathbb{Q}_{p^h}}(V_{a,h})$  est divisible par  $h$  (si  $e$  est cette dimension, alors  $\varphi^h = p^{ae}$  sur  $\det(V_{a,h})$ );

(2) si  $h = 1$  et  $a = 0$ , alors on retrouve simplement la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$ ;

(3) si  $e \in \mathbb{Z}$ , alors  $\text{Rep}(a, h)$  et  $\text{Rep}(a + eh, h)$  sont équivalentes de manière évidente;

(4) si  $D$  est un  $\varphi$ -module isocline de pente  $a/h$  sur  $K_0$ , alors le théorème de Dieudonné–Manin implique que  $V_{a,h} = (\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\text{nr}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi^h = p^a}$  est un objet de  $\text{Rep}(a, h)$  dont la dimension en tant que  $\mathbb{Q}_{p^h}$ -espace vectoriel est  $\dim_{K_0}(D)$ . Dans ce cas, l'action de  $I_K \subset G_K$  sur  $V_{a,h}$  est d'ailleurs triviale.

Si  $V_{a,h} \in \text{Rep}(a, h)$ , on pose  $W_e(V_{a,h}) = (\mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} V_{a,h})^{\varphi=1}$  et  $W_{\text{dR}}^+(V_{a,h}) = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} V_{a,h}$ .

**Théorème 3.2.3.** Si  $V_{a,h} \in \text{Rep}(a, h)$ , alors  $W(V_{a,h}) = (W_e(V_{a,h}), W_{\text{dR}}^+(V_{a,h}))$  est une  $B$ -paire et le foncteur  $V_{a,h} \mapsto W(V_{a,h})$  définit une équivalence de catégories entre  $\text{Rep}(a, h)$  et la catégorie des  $B$ -paires  $W$  telles que  $D(W)$  est isocline de pente  $a/h$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $W = W(V_{a,h})$  est une  $B$ -paire. Par ailleurs, la construction de  $D(W)$  fournie par le Lemme 2.2.1 et la proposition 2.2.5 montre que l'on a  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D(W) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbb{Q}_{p^h}} V_{a,h}$  ce qui fait que  $D(W)$  est isocline de pente  $a/h$ .

Réciproquement, si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module isocline de pente  $a/h$ , alors par la proposition 1.1.5, on a une décomposition

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D = \bigoplus_{i=1}^k M_{a,h} = \bigoplus_{i=1}^k \bigoplus_{j=0}^{h-1} \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \varphi^j(e_i)$$

où  $e_i, \varphi(e_i), \dots, \varphi^{h-1}(e_i)$  est une base de la  $i$ -ième copie de  $M_{a,h}$ . On voit alors que  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{h-1} \lambda_{ij} \varphi^j(e_i) \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D)^{\varphi^h = p^a}$  si et seulement si on a  $\varphi^h(\lambda_{ij}) = \lambda_{ij}$  pour tous  $i, j$  et comme  $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger)^{\varphi^h = 1} = \mathbb{Q}_{p^h}$ , on trouve que  $V_{a,h} = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} D)^{\varphi^h = p^a}$  est un  $\mathbb{Q}_{p^h}$ -espace vectoriel de dimension  $\text{rg}(D)$  qui hérite d'une action de  $G_K$  et d'un Frobenius tel que  $\varphi^h = p^a$ . Si  $W$  est une  $B$ -paire telle que  $D(W)$  est



isocline de pente  $a/h$ , alors on lui associe l'espace  $V_{a,h}$  construit à partir de  $D(W)$ . Le lecteur vérifiera qu'on a ainsi défini un foncteur inverse de  $V_{a,h} \mapsto W(V_{a,h})$ .  $\square$

Il sera intéressant de calculer les extensions d'objets isoclines ; les extensions de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sont étudiées dans [Liu 2007].

**3.3. Les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de hauteur finie.** Comme l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \cap \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  n'a de bonnes propriétés que si  $K \subset K_0(\mu_{p^\infty})$ , on suppose que cette condition est vérifiée dans tout ce paragraphe. Dans ce cas,  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  s'identifie à l'ensemble des séries  $f(X) = \sum_{k \geq 0} f_k X^k$  qui convergent sur le disque unité ouvert, ce qui en fait un anneau de Bézout, et si on pose  $\mathbf{B}_K^+ = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \cap \mathbf{B}_K^\dagger$ , alors  $\mathbf{B}_K^+ = K_0 \otimes_{\mathbb{C}_{K_0}} \mathbb{C}_{K_0}[[X]]$ .

**Définition 3.3.1.** On dit qu'un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  est de hauteur finie s'il existe un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D^+$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  tel que  $D = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} D^+$  et on dit qu'une  $B$ -paire  $W$  est de hauteur finie si  $D(W)$  l'est.

Remarquons qu'un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$ -module  $D^+$  stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$  tel que  $\det \varphi$  est inversible dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  (et non dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  ce qui serait trop restrictif).

**Lemme 3.3.2.** Si  $K \subset K_0(\mu_{p^\infty})$ , alors la définition ci-dessus est compatible avec la définition habituelle quand  $W = W(V)$ .

*Démonstration.* Si  $W = W(V)$  avec  $V$  de hauteur finie au sens habituel (cf. [Colmez 1999]), alors il est évident que  $W$  est de hauteur finie. Montrons donc la réciproque. Par hypothèse, il existe une base de  $D(V)$  dans laquelle  $\text{Mat}(\varphi) = P^+ \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+)$  et  $\text{Mat}(\gamma) = G^+ \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+)$  pour  $\gamma \in \Gamma_K$  (puisque  $V$  est de hauteur finie) ainsi qu'une base de  $D^\dagger(V)$  dans laquelle  $\text{Mat}(\varphi) = P^\dagger \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$  et  $\text{Mat}(\gamma) = G^\dagger \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$  pour  $\gamma \in \Gamma_K$ .

Soit  $M$  la matrice de passage d'une base à l'autre. La proposition 6.5 de [Kedlaya 2004] montre que l'on peut écrire  $M = M^+ \cdot M^\dagger$  avec  $M^+ \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+)$  et  $M^\dagger \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ . Dans la base de  $D^\dagger(V)$  obtenue en appliquant  $M^\dagger$  à celle de  $D^\dagger(V)$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(\varphi) &= \varphi(M^+) P^+ (M^+)^{-1} = \varphi(M^\dagger)^{-1} P^\dagger (M^\dagger), \\ \text{Mat}(\gamma) &= \gamma(M^+) G^+ (M^+)^{-1} = \gamma(M^\dagger)^{-1} G^\dagger (M^\dagger), \end{aligned}$$

ce qui fait que ces matrices sont à coefficients dans  $\mathbf{B}_K^\dagger \cap \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ = \mathbf{B}_K^+$ .  $\square$

**Lemme 3.3.3.** Si  $D^+$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$ , alors il existe des entiers  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  tels que l'idéal engendré par  $\det(\varphi)$  est engendré par  $X^{\alpha_0} Q_1^{\alpha_1} \dots Q_m^{\alpha_m}$  et si  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , alors  $\alpha_0 = 0$ .

*Démonstration.* Ce lemme se trouve dans la partie B.1.6 de [Wach 1996] mais nous en donnons une démonstration pour la commodité du lecteur. Comme l'action de  $\varphi$  commute à  $\Gamma_K$ , l'idéal engendré par  $\det(\varphi)$  est stable par  $\Gamma_K$  et la première partie

du lemme suit alors du lemme I.3.2 de [Berger 2004b] et du fait que si cet idéal est inversible dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , alors les  $\alpha_j$  sont presque tous nuls.

Si  $\delta = \det(\varphi)$  et  $g = \det(\gamma)$  pour  $\gamma \in \Gamma_K$ , alors  $\gamma(\delta)/\delta = \varphi(g)/g$  et en réduisant modulo  $X$ , on trouve que  $\chi(\gamma)^{\alpha_0}$  s'écrit  $\varphi(g_0)/g_0$  avec  $g_0 \in K_0$ . Si  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , alors  $\varphi(g_0)/g_0$  est de norme 1 et donc  $\chi(\gamma)^{\alpha_0[K_0:\mathbb{Q}_p]} = 1$  ce qui fait que  $\alpha_0 = 0$ .  $\square$

Le lecteur vicieux montrera que si le corps résiduel de  $K$  est algébriquement clos, on peut effectivement avoir  $\alpha_0 \neq 0$ .

**Définition 3.3.4.** Un  $\varphi$ -module filtré sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$  est un  $\varphi$ -module  $D$  sur  $K_0$  muni d'une action de  $\Gamma_K$  commutant à  $\varphi$  et d'une filtration (décroissante, exhaustive et séparée) stable par  $\Gamma_K$  sur  $D_\infty = K_\infty \otimes_{K_0} D$ .

Il existe alors un entier  $n \geq 0$  tel que la filtration de  $D_\infty$  est définie sur  $K_n$ , c'est-à-dire que si l'on pose  $D_n = K_n \otimes_{K_0} D$ , alors  $\text{Fil}^i D_\infty = K_\infty \otimes_{K_n} \text{Fil}^i D_n$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et on appelle  $n(D)$  le plus petit entier ayant cette propriété.

**Proposition 3.3.5.** Si  $D$  est un  $\varphi$ -module filtré sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$ , alors la  $B$ -paire  $W = ((\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{K_\infty} D_\infty)$  est de hauteur finie.

*Démonstration.* Soit  $h \geq 0$  tel que  $\text{Fil}^h D_\infty = 0$  et  $\text{Fil}^{-h} D_\infty = D_\infty$ . Si  $n \geq 1$ , on écrit  $\varphi^{-n}$  pour  $\iota_n$ . Posons alors comme dans [Colmez 2003a, §3.1] et [Kisin 2006] :

$$\mathcal{M}^+(D) = \{y \in t^{-h} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} D \mid \varphi^n(y) \in \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty) \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

C'est un sous- $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$ -module fermé de  $t^{-h} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} D$  qui contient  $t^h \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} D$  et qui est donc libre de rang  $d = \dim D$ . Il est de plus manifestement stable par  $\varphi$  et  $\Gamma_K$ .

Si  $n \geq n(D)$ , alors :

$$K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+}^{\iota_n} t^{-h} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} D = t^{-h} K_n[[t]] \otimes_{K_0} D \supset \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_{K_n} D_n).$$

Si  $y_n \in \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_{K_n} D_n)$  et  $w \geq 0$ , il existe donc  $y \in t^{-h} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} D$  donc l'image par  $\iota_n$  vérifie  $\iota_n(y) - y_n \in \text{Fil}^w(K_n((t)) \otimes_{K_n} D_n)$ . L'élément  $z = y \cdot (t/Q_n)^{2h}$  a alors la propriété que  $\iota_n(z)$  est un multiple de  $\iota_n(y)$  et que pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  différent de  $-n$ , on a  $\varphi^m(z) \in \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty)$  ce qui fait que  $z \in \mathcal{M}^+(D)$ . On en déduit que si  $n \geq n(D)$ , alors l'application :

$$K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+}^{\iota_n} \mathcal{M}^+(D) \rightarrow \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_{K_n} D_n)$$

est un isomorphisme. En particulier, l'application naturelle  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D) \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}(W)$  est un isomorphisme et donc, en utilisant l'unicité dans la proposition 2.2.5, on trouve que  $\mathbf{D}(W) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D)$  ce qui fait que  $W$  est de hauteur finie. Remarquons que dans les notations de [Berger 2004a], on a

$$\mathcal{M}(D) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D). \quad \square$$

**Remarque 3.3.6.** Le fait de ne considérer que les  $y \in t^{-h} \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+ \otimes_{K_0} D$  tels que l'on a  $\varphi^n(y) \in \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  n'est pas restrictif ; le lecteur pourra montrer que :

$$\mathcal{M}^+(D) = \{y \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+[1/t] \otimes_{K_0} D \mid \varphi^n(y) \in \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty) \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$  sont tels que  $\text{Fil}^{-a+1} D = 0$  et  $\text{Fil}^{-b} D = D$  (c'est-à-dire que les poids de  $D$  sont dans l'intervalle  $[a; b]$ ), alors on a  $t^b \cdot \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+ \otimes_{K_0} D \subset \mathcal{M}^+(D) \subset t^a \cdot \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+ \otimes_{K_0} D$ .

En appliquant la proposition 3.3.5 à  $D_{\text{cris}}(V)$ , on retrouve le théorème principal de [Colmez 1999] généralisé dans [Berger et Breuil 2006].

**Corollaire 3.3.7.** *Si  $V$  est une représentation de  $G_K$  qui devient cristalline sur une extension  $K_n$  de  $K$ , alors  $V$  est de hauteur finie.*

On peut d'ailleurs se demander quand est-ce que  $W(D)$  est cristalline.

**Lemme 3.3.8.** *Si  $V$  est une représentation de  $\Gamma_K$ , alors :*

- (1)  *$V$  est cristalline si et seulement si  $V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V^{\Gamma_K = \chi^j}$  ;*
- (2)  *$V$  est de Hodge–Tate si et seulement si elle est potentiellement cristalline.*

*Démonstration.* Le (1) est l'objet du lemme 3.4.3 de [Perrin-Riou 1994], mais nous en donnons une nouvelle démonstration. Pour cela, observons que  $D_{\text{Sen}}(V) = K_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$  et donc que  $V$  est de Hodge–Tate si et seulement si  $\nabla_V$  est diagonalisable à valeurs propres entières sur  $K_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$  ; ceci est équivalent à demander qu'il existe  $n \geq 0$  tel que  $K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma_{K_n} = \chi^j}$ . Comme  $(K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma_{K_n} = \chi^j} = K_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{\Gamma_{K_n} = \chi^j}$ , et qu'une représentation d'image finie de  $\Gamma_K$  est cristalline si et seulement si elle est triviale, on en déduit le (1) et le (2).  $\square$

**Corollaire 3.3.9.** *Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module filtré sur  $K_0$ , la  $B$ -paire construite ci-dessus est cristalline si et seulement si  $D = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} D^{\Gamma = \chi^j}$ .*

*Démonstration.* Comme  $W_e = (\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$ , on a  $\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{\mathbf{B}_e} W_e = \mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{K_0} D$  ce qui fait que  $W$  est cristalline si et seulement si  $D$  est cristalline en tant que représentation de  $\Gamma_K$ . Le corollaire suit alors du Lemme 3.3.8 ci-dessus.  $\square$

**Proposition 3.3.10.** *Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module de hauteur finie, alors il existe un  $\varphi$ -module filtré  $D$  sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$  tel que  $D = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+} \mathcal{M}^+(D)$ .*

*Démonstration.* Soit  $D^+$  un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+$  tel que  $D = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+ \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+} D^+$  et  $D = D^+/X$ . Soit  $\nabla = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$  pour  $\gamma \in \Gamma_K$  proche de 1.

Commençons par montrer que si  $P \in K_0[T]$  est un polynôme tel que  $P(\nabla) : D(j) \rightarrow D(j)$  est bijectif pour tout  $j \geq 1$ , alors l'application  $(D^+)^{P(\nabla)=0} \rightarrow D^{P(\nabla)=0}$  est bijective. Pour cela, nous montrons d'abord que l'application :

$$(K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+} D^+)^{P(\nabla)=0} \rightarrow D^{P(\nabla)=0}$$

est bijective. L'injectivité ne pose pas de problème : si  $y \in K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+$  est dans son noyau, et si  $j$  est un entier  $\geq 1$  tel que  $y \in t^j K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+$ , alors  $P(\nabla)(y) = 0$  dans  $t^j K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+ / t^{j+1} = D(j)$  et donc  $y \in t^{j+1} K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+$ , ce qui fait en itérant que  $y = 0$ . Montrons à présent la surjectivité ; si  $\bar{z} \in D^{P(\nabla)=0}$ , alors il existe  $z_0 \in \mathbf{D}^+$  qui relève  $\bar{z}$  et tel que  $P(\nabla)(z_0) \in XD^+$  et l'hypothèse selon laquelle  $P(\nabla) : D(j) \rightarrow D(j)$  est bijectif pour tout  $j \geq 0$  nous permet de construire par récurrence  $z_j \in z_{j-1} + X^j \mathbf{D}^+$  tel que  $P(\nabla)(z_j) \in X^{j+1} \mathbf{D}^+$  et donc  $z \in (K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0}$  relevant  $\bar{z}$  ce qui fait que notre application est bien bijective.

Montrons à présent que  $(K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0} = (\mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0}$ . Pour cela, remarquons que  $(K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0}$  est un  $K_0$ -espace vectoriel de dimension finie (puisqu'il s'injecte dans  $D$ ) stable par  $\varphi$ . Si l'on choisit une base de  $\mathbf{D}^+$  et que l'on appelle  $Q$  la matrice de  $\varphi$  dans cette base, et si l'on choisit une base de  $(K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0}$  et que l'on appelle  $P_0$  la matrice de  $\varphi$  dans cette base et  $Y$  la matrice de passage entre les deux bases, alors on a  $\varphi(Y)Q = P_0Y$  et donc  $Y = P_0^{-1}\varphi(Y)Q$ . Écrivons  $Q = \sum_{k \geq 0} Q_k t^k$  et  $Y = \sum_{k \geq 0} Y_k t^k$ . Si  $M$  est une matrice à coefficients dans  $K_0$ , notons  $\text{val}_p(M)$  le minimum des valuations de ses coefficients. Comme  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \subset \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[t/p]]$  (n'oublions pas que  $X = \exp(t) - 1$ ), on voit qu'il existe un entier  $h_1$  tel que  $\text{val}_p(Q_k) \geq -h_1 - k$  et il existe par ailleurs un entier  $h_2$  tel que  $\text{val}_p(P_0^{-1}) \geq -h_2$  ; posons  $h = h_1 + h_2$ . On déduit alors de l'équation  $Y = P_0^{-1}\varphi(Y)Q$  que  $Y = P_0^{-1}\varphi(P_0^{-1}) \cdot \varphi^2(Y) \cdot \varphi(Q)Q$  et (comme  $\text{val}_p(p^k Q_k) \geq -h_1$ ) que :

$$\begin{aligned} \text{val}_p(Y_k) &\geq -2h + \min_{0 \leq \ell \leq k} (2\ell + \text{val}_p(Y_\ell) - \ell) \\ &= -2h + \min_{0 \leq \ell \leq k} (\ell + \text{val}_p(Y_\ell)). \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence sur  $k \geq 2h$  que si  $k \geq 2h$ , alors  $\text{val}_p(Y_k) \geq -2h + \min_{0 \leq \ell \leq 2h} \text{val}_p(Y_\ell)$  et donc, comme  $\mathbb{C}_{K_0}[[t]] \subset \mathbb{C}_{K_0}[[X/p]]$ , que :

$$(K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0} = ((K_0 \otimes_{\mathbb{C}_{K_0}} \mathbb{C}_{K_0}[[X/p]]) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0}.$$

Pour terminer, on utilise de nouveau le fait que  $((K_0 \otimes_{\mathbb{C}_{K_0}} \mathbb{C}_{K_0}[[X/p]]) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0}$  est un  $K_0$ -espace vectoriel de dimension finie stable par  $\varphi$ , et que si  $n \geq 0$ , alors :

$$\varphi(K_0 \otimes_{\mathbb{C}_{K_0}} \mathbb{C}_{K_0}[[X^{p^n}/p]]) \subset K_0 \otimes_{\mathbb{C}_{K_0}} \mathbb{C}_{K_0}[[X^{p^{n+1}}/p]]$$

pour conclure que  $(K_0[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0} = (\mathbf{D}^+)^{P(\nabla)=0}$  puisque

$$\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ = \bigcap_{n \geq 0} K_0 \otimes_{\mathbb{C}_{K_0}} \mathbb{C}_{K_0}[[X^{p^n}/p]].$$

Revenons à notre espace  $D = D^+/X$  et soit  $Q$  le polynôme minimal de  $\nabla$ . On voit que l'on peut écrire  $Q = PR$  où  $P$  est non trivial et a la propriété que  $P(X+j) \wedge P(X) = 1$  pour tout  $j \geq 1$ , ce qui revient à dire que  $P(\nabla) : D(j) \rightarrow D(j)$  est bijectif. Si  $P \neq Q$ , alors soit  $j$  le plus petit entier tel que  $P(X+j) \wedge P(X) \neq 1$ ; on vient de montrer que l'application  $(D^+)^{P(\nabla)=0} \rightarrow D^{P(\nabla)=0}$  est un isomorphisme, et si l'on remplace  $D^+$  par  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} (D^+)^{P(\nabla)=0} + X^j D^+$ , alors on a toujours  $D = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} D^+$  mais on peut prendre  $P$  de degré plus grand. En itérant cette opération un nombre fini de fois, on voit donc que quitte à remplacer  $D^+$  par un sous-module, on peut supposer que l'application  $(D^+)^{Q(\nabla)=0} \rightarrow D^{Q(\nabla)=0} = D$  est un isomorphisme.

On fait alors un léger abus de notation, et on pose  $D = (D^+)^{Q(\nabla)=0}$ ; c'est un  $\varphi$ -module sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$ . Remarquons que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} D \subset D^+$  et que le déterminant de l'inclusion est un idéal de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  stable par  $\Gamma_K$  et par  $\varphi$  (car  $\varphi : D \rightarrow D$  est bijectif) ce qui fait, par le lemme I.3.2 de [Berger 2004b], que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+[1/t] \otimes_{K_0} D = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} D^+$ . Par le Lemme 3.3.3, le déterminant de  $\varphi$  sur  $D^+$  est de la forme  $X^{\alpha_0} Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_m^{\alpha_m}$ . Si  $n \geq m$ , alors l'application déduite du Frobenius :

$$K_{n+1}[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+}^{l_n+1} D^+ \rightarrow K_{n+1}[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+}^{l_n} D^+$$

est un isomorphisme et la définition :

$$\text{Fil}^i(D_\infty) = D_\infty \cap t^i K_\infty[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+}^{l_n} D^+$$

ne dépend donc pas de  $n \geq m$ . Si  $y \in D^+$  et  $n \geq n(D) = m$ , alors  $\iota_n(y) \in \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_{K_n} D_n)$  et si  $n \geq -n(D)$ , alors  $\varphi^n(y) = \iota_{n(D)}(\varphi^{n+n(D)}(y))$  ce qui fait que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\varphi^n(y) \in \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty)$  et donc  $D^+ \subset \mathcal{M}^+(D)$ . Il reste à constater que pour tout  $n \geq n(D)$ , on a :

$$K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+}^{l_n} D^+ = K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+}^{l_n} \mathcal{M}^+(D)$$

ce qui fait que  $D = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} D^+ = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D)$ .  $\square$

Deux  $\varphi$ -modules filtrés sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$  différents peuvent donner le même  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$ . Par exemple, si on a moralement  $D_1 = K_0$  et  $D_2 = K_0 \cdot t$ , alors  $\mathcal{M}^+(D_1) = \mathcal{M}^+(D_2) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$ . Cet exemple est représentatif comme le montre la proposition ci-dessous :

**Proposition 3.3.11.** *Si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux  $\varphi$ -modules filtrés sur  $K_0$  avec action de  $\Gamma_K$ , alors  $\mathcal{M}^+(D_1) = \mathcal{M}^+(D_2)$  si et seulement s'il existe un isomorphisme  $K_0[t, t^{-1}] \otimes_{K_0} D_1 = K_0[t, t^{-1}] \otimes_{K_0} D_2$  compatible à  $\varphi$  et  $\Gamma_K$ , et compatible à la filtration quand on étend les scalaires à  $K_\infty((t))$ .*

*Démonstration.* La construction de  $\mathcal{M}^+(D)$  montre que ce module ne dépend que de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+[1/t] \otimes_{K_0} D$  et de la filtration sur  $K_\infty((t)) \otimes_{K_0} D$  ce qui fait que si les

conditions de la proposition sont vérifiées, alors  $\mathcal{M}^+(D_1) = \mathcal{M}^+(D_2)$ . On voit réciproquement que si  $\mathcal{M}^+(D_1) = \mathcal{M}^+(D_2)$ , alors :

$$\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+[1/t] \otimes_{K_0} D_1 = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+[1/t] \otimes_{K_0} D_2$$

et cet isomorphisme est compatible à la filtration quand on étend les scalaires à  $K_\infty((t))$ . Si  $G_1$  et  $G_2$  sont les matrices d'un élément  $\gamma \in \Gamma_K$  qui n'est pas de torsion, et si  $M$  est la matrice de l'isomorphisme entre  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+[1/t] \otimes_{K_0} D_1$  et  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+[1/t] \otimes_{K_0} D_2$  alors on a  $\gamma(M)G_1 = G_2M$ , et si l'on écrit  $M = \sum_{i \gg -\infty} t^i M_i$ , alors on voit que l'on a  $\chi(\gamma)^i M_i G_1 = G_2 M_i$  et donc que si  $M_i \neq 0$ , alors  $\chi(\gamma)^i$  est quotient d'une valeur propre de  $G_1$  par une valeur propre de  $G_2$ , ce qui n'est possible que pour un nombre fini de valeurs de  $i$ . On en déduit que  $M$  est à coefficients dans  $K_0[t, t^{-1}]$  et donc que  $K_0[t, t^{-1}] \otimes_{K_0} D_1 = K_0[t, t^{-1}] \otimes_{K_0} D_2$ .  $\square$

Afin de terminer la démonstration du théorème D, il nous faut montrer que si  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D_1) = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D_2)$ , alors  $\mathcal{M}^+(D_1) = \mathcal{M}^+(D_2)$ . Cela suit de la proposition ci-dessous.

**Proposition 3.3.12.** *Si  $D = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D)$ , et si  $D^+$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  de rang fini et contenu dans  $D$ , alors  $D^+ \subset \mathcal{M}^+(D)$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $D[1/t] = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t] \otimes_{K_0} D$ ; comme  $D^+$  est de rang fini  $r$ , il existe  $s > 0$  et  $h \in \mathbb{Z}$  tels que  $D^+ \subset t^{-h} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} \otimes_{K_0} D$ . Choisissons des bases de  $D^+$  et de  $D$  et appelons  $M$ ,  $P^+$  et  $P_0$  la matrice de passage, la matrice de  $\varphi$  sur  $D^+$  et la matrice de  $\varphi$  sur  $t^{-h}D$  ce qui fait que  $P_0\varphi(M) = MP^+$ . Comme  $P_0 \in \text{GL}_d(K_0)$ , le corollaire I.4.2 de [Berger 2004b] (qui s'étend verbatim aux matrices rectangulaires) nous donne que  $M \in M_{d \times r}(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+)$  et donc que  $D^+ \subset t^{-h} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^+ \otimes_{K_0} D$ .

Quitte à augmenter  $s$ , on a de plus que  $D^+ \subset \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+} \mathcal{M}^+(D)$  et si  $y \in D^+$  et  $n \geq n(s)$ , alors  $\iota_n(y) \in \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty)$  puisque  $\iota_n(\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}) \subset K_n[[t]]$ , et donc  $\iota_n(D^+) \subset \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty)$ . Enfin, si  $n \geq -n(s)$  et  $y \in D^+$ , alors  $\varphi^n(y) = \iota_{n(s)}(\varphi^{n(s)+n}(y))$  et donc  $\varphi^n(D^+) \subset \text{Fil}^0(K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty} D_\infty)$  ce qui fait, étant donnée la définition de  $\mathcal{M}^+(D)$  donnée dans la proposition 3.3.5, que  $D^+ \subset \mathcal{M}^+(D)$ .  $\square$

En particulier, un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^+$  de rang fini et contenu dans  $D$  est nécessairement de rang  $\leq d$ .

### Annexe : Liste des notations

Voici une liste des principales notations dans l'ordre où elles apparaissent.

Introduction :  $k, K, K_0, G_K$ .

§1.1 :  $\tilde{\mathbf{E}}^+, \varepsilon^{(n)}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}^+, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}^+, \tilde{\mathbf{B}}, \theta, \mathbf{B}_{\text{dR}}^+, X, t, \mathbf{B}_{\text{dR}}, \tilde{p}, \mathbf{B}_{\text{max}}^+, \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+, \mathbf{B}_{\text{max}}, \mathbf{B}_{\text{st}}, N, \mathbf{B}_{\text{cris}}, \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}, \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}, K_n, H_K, \Gamma_K, \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}, K'_0, \mathbf{B}_K^{\dagger,r}, M_{a,h}, \mathbf{B}_e, t_h, V_{[r;s]}, \tilde{\mathbf{B}}^{[r;s]}, \mathbf{B}_K^{[r;s]}, \rho(r)$ .

§1.2 :  $\deg D, \text{NP}(D), r_n, n(r), \iota_n, Q_n$ .

§2 :  $W_e, W_{\text{dR}}^+, W_{\text{dR}}$ .

§2.2 :  $\tilde{D}^r(W), W(D)$ .

§2.3 :  $D_{\text{cris}}(W), D_{\text{st}}(W), D_{\text{dR}}(W), \mathcal{M}(D), D_{\text{Sen}}(W)$ .

§3.2 :  $\text{Rep}(a, h)$ .

§3.3 :  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^+, \mathbf{B}_K^+, \mathcal{M}^+(D), \nabla$ .

## Remerciements

Je remercie Pierre Colmez pour de nombreuses discussions sur plusieurs thèmes qui se sont concrétisés dans ce texte, Jean-Marc Fontaine pour avoir suggéré que les  $\mathbf{B}_e$ -représentations sont de bons objets et m'avoir expliqué ses idées sur le lien entre les  $B$ -paires et les presque  $\mathbb{C}_p$ -représentations, Kiran Kedlaya pour ses explications sur les  $\varphi$ -modules et les nombreux anneaux qui interviennent dans ses constructions, et Kiran Kedlaya et Ruochuan Liu pour leur construction d'un contre-exemple à une de mes affirmations (cf. le (2) de la Remarque 3.1.7). Cet article a été rédigé à l'IHES qui m'a offert d'excellentes conditions de travail.

## References

- [Berger 2002] L. Berger, “Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles”, *Invent. Math.* **148**:2 (2002), 219–284. MR 2004a:14022 Zbl 01777245
- [Berger 2004a] L. Berger, “Equations différentielles  $p$ -adiques et  $(\varphi, N)$ -modules filtrés”, prépublication, 2004. À paraître dans *Astérisque*. arXiv math/0406601
- [Berger 2004b] L. Berger, “Limites de représentations cristallines”, *Compos. Math.* **140**:6 (2004), 1473–1498. MR 2006c:11138 Zbl 1071.11067
- [Berger et Breuil 2006] L. Berger et C. Breuil, “Sur quelques représentations potentiellement cristallines de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ”, prépublication, 2006. À paraître dans *Astérisque*. arXiv math/0601545
- [Berger et Colmez 2007] L. Berger et P. Colmez, “Familles de représentations de de Rham et monodromie  $p$ -adique”, 2007, <http://www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/publications.html>. À paraître dans *Astérisque*.
- [Cherbonnier et Colmez 1998] F. Cherbonnier et P. Colmez, “Représentations  $p$ -adiques surconvergentes”, *Invent. Math.* **133**:3 (1998), 581–611. MR 2000d:11146 Zbl 0928.11051
- [Colmez 1999] P. Colmez, “Représentations cristallines et représentations de hauteur finie”, *J. Reine Angew. Math.* **514** (1999), 119–143. MR 2001h:11147 Zbl 01343282
- [Colmez 2002] P. Colmez, “Espaces de Banach de dimension finie”, *J. Inst. Math. Jussieu* **1**:3 (2002), 331–439. MR 2004b:11160 Zbl 1044.11102
- [Colmez 2003a] P. Colmez, “Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham”, 2003, [www.institut.math.jussieu.fr/~colmez/publications.html](http://www.institut.math.jussieu.fr/~colmez/publications.html). À paraître dans *Astérisque*.
- [Colmez 2003b] P. Colmez, “Les conjectures de monodromie  $p$ -adiques”, pp. 53–101, exposé 897 dans *Séminaire Bourbaki année 2001/2002*, *Astérisque* **290**, Soc. Math. de France, Paris, 2003. MR 2005f:12008 Zbl 02134851

- [Colmez 2005] P. Colmez, “Série principale unitaire pour  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et représentations triangulines de dimension 2”, 2005, <http://www.institut.math.jussieu.fr/~colmez/publications.html>.
- [Colmez 2007] P. Colmez, “Représentations triangulines de dimension 2”, prépublication, 2007, <http://www.institut.math.jussieu.fr/~colmez/publications.html>. À paraître dans *Astérisque*.
- [Colmez et Fontaine 2000] P. Colmez et J.-M. Fontaine, “Construction des représentations  $p$ -adiques semi-stables”, *Invent. Math.* **140**:1 (2000), 1–43. MR 2001g:11184 Zbl 1010.14004
- [Fontaine 1994a] J.-M. Fontaine, “Le corps des périodes  $p$ -adiques”, pp. 59–111 dans *Périodes  $p$ -adiques* (Bures-sur-Yvette, 1988), édité par J.-M. Fontaine, Astérisque **223**, Soc. Math. de France, Paris, 1994. MR 95k:11086 Zbl 0940.14012
- [Fontaine 1994b] J.-M. Fontaine, “Représentations  $p$ -adiques semi-stables”, pp. 113–184 dans *Périodes  $p$ -adiques* (Bures-sur-Yvette, 1988), édité par J.-M. Fontaine, Astérisque **223**, Soc. Math. de France, Paris, 1994. MR 95g:14024 Zbl 0865.14009
- [Fontaine 2003] J.-M. Fontaine, *Presque  $\mathbb{C}_p$ -représentations*, édité par S. Bloch et al., Documenta Mathematica, Bielefeld, 2003. MR 2046593 Zbl 02028839
- [Fontaine 2004] J.-M. Fontaine, “Arithmétique des représentations galoisiennes  $p$ -adiques”, pp. xi, 1–115 dans *Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques, III*, édité par P. Berthelot et al., Astérisque **295**, Soc. Math. de France, Paris, 2004. MR 2005i:11074 Zbl 1052.00008
- [Fontaine et Wintenberger 1979] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger, “Le “corps des normes” de certaines extensions algébriques de corps locaux”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288**:6 (1979), A367–A370. MR 80b:12015 Zbl 0475.12020
- [Kedlaya 2004] K. S. Kedlaya, “A  $p$ -adic local monodromy theorem”, *Ann. of Math. (2)* **160**:1 (2004), 93–184. MR 2005k:14038 Zbl 1088.14005
- [Kedlaya 2005] K. S. Kedlaya, “Slope filtrations revisited”, *Doc. Math.* **10** (2005), 447–525. MR 2007c:14016 Zbl 1081.14028
- [Kedlaya 2006] K. Kedlaya, “Slope filtrations for relative Frobenius”, 2006. À paraître dans *Astérisque*. arXiv math/0609272
- [Kisin 2006] M. Kisin, “Crystalline representations and  $F$ -crystals”, pp. 459–496 dans *Algebraic geometry and number theory*, édité par V. Ginzburg, Progr. Math. **253**, Birkhäuser, Boston, 2006. MR 2007j:11163
- [Liu 2007] R. Liu, “Cohomology and duality for  $(\varphi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring”, prépublication, 2007.
- [Perrin-Riou 1994] B. Perrin-Riou, “Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques sur un corps local”, *Invent. Math.* **115**:1 (1994), 81–161. MR 95c:11082 Zbl 0838.11071
- [Sen 1980] S. Sen, “Continuous cohomology and  $p$ -adic Galois representations”, *Invent. Math.* **62**:1 (1980), 89–116. MR 82e:12018 Zbl 0463.12005
- [Wach 1996] N. Wach, “Représentations  $p$ -adiques potentiellement cristallines”, *Bull. Soc. Math. France* **124**:3 (1996), 375–400. MR 98b:11119 Zbl 0887.11048
- [Wintenberger 1983] J.-P. Wintenberger, “Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16**:1 (1983), 59–89. MR 85e:11098 Zbl 0516.12015

Communicated by Marie-France Vignéras

Received 2007-07-12

Revised 2007-09-29

Accepted 2007-09-29

laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr UMPA ENS Lyon, 46 allée d’Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

[www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger](http://www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger)