

# *Algebra & Number Theory*

Volume 2

2008

No. 5

**Le défaut d'approximation forte pour les groupes  
algébriques commutatifs**

David Harari



**mathematical sciences publishers**



# Le défaut d'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs

David Harari

On établit une suite exacte décrivant l'adhérence des points rationnels d'un 1-motif dans ses points adéliques. On en déduit ensuite que le défaut d'approximation forte pour un groupe algébrique commutatif  $G$  est essentiellement mesuré par son groupe de Brauer algébrique via l'obstruction de Brauer-Manin entière.

We give an exact sequence describing the closure of the set of rational points of a 1-motive in its adelic points. From this we deduce that for a commutative algebraic group, the defect of strong approximation is essentially controlled by its algebraic Brauer group, by means of the integral Brauer-Manin obstruction.

## 1. Introduction

**1.1. *Rappels et notations.*** Soit  $M = [Y \rightarrow G]$  un 1-motif sur un corps de nombres  $k$ , dont on note  $M^*$  le 1-motif dual. Rappelons (cf. [Harari et Szamuely 2005], section 1) qu'ici  $Y$  est un  $k$ -schéma en groupes (placé en degré  $-1$ ) localement isomorphe pour la topologie étale à  $\mathbf{Z}^r$  (avec  $r \geq 0$ ) et  $G$  est une  $k$ -variété semi-abélienne (extension d'une  $k$ -variété abélienne  $A$  par un  $k$ -tore  $T$ ) que l'on place en degré zéro. Le cas particulier le plus significatif pour cet article est celui où  $M = T \simeq [0 \rightarrow T]$  : alors  $M^* = \widehat{T}[1] = [\widehat{T} \rightarrow 0]$ , où  $\widehat{T}$  est le module des caractères du tore  $T$ . Pour simplifier les notations, on note simplement  $H^i(k, M)$  les groupes d'hypercohomologie  $\mathbf{H}^i(k, M)$  du 1-motif  $M$  ; si par exemple  $M = T$ , on a donc  $H^i(k, M) = H^i(k, T)$  et  $H^i(k, M^*) = H^i(k, \widehat{T}[1]) = H^{i+1}(k, \widehat{T})$ .

Soit  $\Omega$  l'ensemble de toutes les places de  $k$ . On note  $\mathbb{O}$  l'anneau des entiers de  $k$  et si  $v$  est une place non archimédienne de  $k$ , on note  $\mathbb{O}_v$  l'anneau des entiers du complété  $k_v$  de  $k$  en  $v$ . Si  $S$  est un ensemble fini de places de  $k$  (contenant les places archimédiennes), on note  $\mathbb{O}_S$  le sous-anneau de  $k$  constitué des entiers en

---

*MSC2000:* primary 14L15; secondary 12G05, 11G09.

*Mots-clefs:* approximation forte, groupe de Brauer, 1-motif, strong approximation, Brauer group, 1-motive.

dehors de  $S$ . On note aussi  $\mathbf{A}_k$  le groupe des adèles de  $k$  et

$$\mathbf{A}_{\mathbb{C}} := \prod_{v \in \Omega} \mathbb{C}_v$$

le groupe des adèles entiers de  $k$  puis

$$\mathbf{A}_S = \prod_{v \in S} k_v \times \prod_{v \notin S} \mathbb{C}_v$$

le groupe des adèles entiers en dehors de  $S$ , avec la convention que  $\mathbb{C}_v = k_v$  si  $v$  est une place archimédienne.

On choisit un ouvert non vide  $U = \text{Spec}(\mathbb{C}_S)$  de  $\text{Spec} \mathbb{C}$  tel que  $M$  s'étende en un 1-motif  $\mathcal{M} = [\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{G}]$  au-dessus de  $U$ . On note  $A$  et  $T$  (resp.  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{T}$ ) la  $k$ -variété abélienne et le  $k$ -tore correspondant à  $G$  (resp. le  $U$ -schéma abélien et le  $U$ -tore correspondant à  $\mathcal{G}$ ).

On note  $\mathbf{P}^0(M)$  (resp.  $\mathbf{P}_S^0(M)$ ) le produit restreint des  $H^0(k_v, M)$  (resp. des  $H^0(k_v, M)$  pour  $v$  non dans  $S$ ), relativement aux  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$ , avec la convention que pour  $v$  archimédienne,  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) = H^0(k_v, M)$  désigne le groupe modifié  $\widehat{H}^0(k_v, M)$  de Tate défini dans [Harari et Szamuely 2005], p. 103, et aussi que pour  $v \in S$  finie,  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  signifie  $H^0(k_v, M)$ . On pose aussi  $\mathcal{P}_S^0(M) := \prod_{v \in S} H^0(k_v, M) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$ . Ainsi  $\mathcal{P}_S^0(M)$  est un sous-groupe de  $\mathbf{P}^0(M)$ , dont la projection sur le produit restreint "tronqué"  $\mathbf{P}_S^0(M)$  n'est autre que

$$\prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}).$$

On appelle  $\text{III}^1(M)$  le noyau de l'application diagonale

$$H^1(k, M) \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v, M).$$

En particulier  $\text{III}(A) := \text{III}^1(A)$  est le *groupe de Tate-Shafarevitch* de la variété abélienne  $A$ . Il est fortement conjecturé que ce groupe est toujours fini. On note aussi  $\text{III}_{\omega}^1(M)$  le sous-groupe de  $H^1(k, M)$  constitué des éléments dont la restriction à  $H^1(k_v, M)$  est nulle pour presque toute place  $v$ .

Pour tout groupe topologique  $B$ , on note  $B^\wedge$  le complété de  $B$  pour la topologie induite par les sous-groupes ouverts d'indice fini. En particulier si  $B$  est discret, alors  $B^\wedge$  est simplement la complétion profinie de  $B$  (et c'est également le cas pour  $B = H^0(k_v, M)$  avec  $v \in \Omega$  via [Harari et Szamuely 2005], remarque 2.4). On note également  $B^D := \text{Hom}_{\text{cont}}(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  le dual de  $B$ . Si  $B$  est compact et complètement discontinu (i.e. profini), on a  $B^\wedge = B$ .

Si  $X$  est une  $k$ -variété algébrique géométriquement intègre, on note  $\text{Br } X$  son groupe de Brauer cohomologique, et on pose  $\text{Br}_1 X = \ker[\text{Br } X \rightarrow \text{Br } \bar{X}]$ , où  $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$  ( $\bar{k}$  désignant une clôture algébrique de  $k$ ).

**1.2. *Enoncé des résultats principaux.*** Notre premier objectif est d'établir une suite exacte dans l'esprit du théorème 1.2 de [Harari et Szamuely 2008] (lequel, dans le cas des tores, remonte à [Sansuc 1981]), mais qui fait intervenir une obstruction à l'approximation forte au lieu de l'approximation faible. Plus précisément, on a (voir théorème 2) :

**Théorème.** *Soit  $M$  un 1-motif sur  $k$ , de variété abélienne associée  $A$ . On suppose que  $\text{III}(A)$  est fini et on note  $\overline{H^0(k, M)}$  l'adhérence de  $H^0(k, M)$  dans le produit restreint  $\mathbf{P}^0(M)$ . Alors on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow \overline{H^0(k, M)} \rightarrow \mathbf{P}^0(M) \rightarrow H^1(k, M^*)^D \rightarrow \text{III}^1(M) \rightarrow 0$$

La flèche  $\mathbf{P}^0(M) \rightarrow H^1(k, M^*)^D$  vient de la dualité locale ([Harari et Szamuely 2005], section 2) et la flèche  $H^1(k, M^*)^D \rightarrow \text{III}^1(M)$  de la dualité entre les groupes finis  $\text{III}^1(M)$  et  $\text{III}^1(M^*)$  ([Harari et Szamuely 2005], corollaire 4.9). Ainsi l'obstruction à la propriété d'approximation forte pour le 1-motif  $M$  est mesurée par le groupe  $\ker[H^1(k, M^*)^D \rightarrow \text{III}^1(M)]$  (qui est d'indice fini dans  $H^1(k, M^*)^D$ ). Le cas  $M = \mathbf{G}_m$  est très proche d'un énoncé classique de théorie du corps de classes (voir [Neukirch et al. 2008], corollaire 8.3.21 page 464) mais dans le cas d'un tore quelconque, l'énoncé semble déjà nouveau. Nous en établirons également une variante permettant d'obtenir un énoncé d'approximation pour les tores (théorème 3) un peu similaire aux résultats de la section 4 de [Naumann 2008].

Dans la dernière section de ce texte, nous démontrerons le résultat suivant (voir théorème 4), qui fait le lien entre l'obstruction de Manin entière (introduite dans [Colliot-Thélène et Fei 2007], voir la section 4 pour plus de détails) et l'approximation forte pour une variété semi-abélienne.

**Théorème.** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $\mathbb{C}$ -schéma plat dont la fibre générique  $X$  est un espace principal homogène sous une variété semi-abélienne  $G$ . On suppose que le groupe de Tate-Shafarevitch  $\text{III}(A)$  du quotient abélien  $A$  de  $G$  est fini.*

*Soit  $S$  un ensemble fini de places de  $k$ , contenant les places archimédiennes. On suppose qu'il existe un point adélique  $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_S)$  qui est orthogonal à  $\text{Br}_1 X$  pour l'accouplement de Brauer-Manin. Alors il existe un point de  $\mathcal{X}(\mathbb{C}_S)$  qui est arbitrairement proche de  $P_v$  pour  $v \in S$  non archimédienne, et dans la même composante connexe de  $X(k_v)$  que  $P_v$  pour  $v$  réelle. En particulier, si on suppose de plus  $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_\emptyset)$ , alors  $\mathcal{X}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ .*

Notons que l'énoncé analogue pour l'approximation faible est démontré dans [Harari 2006] (voir aussi [Harari et Szamuely 2008], théorème 6.1.).

## 2. Une suite exacte de type Cassels-Tate associée à un 1-motif

Dans toute cette section, les notations sont celles du début de 1.1.

**Lemme 1.** *Soit  $v \notin S$ . On a  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) = 0$ . Pour  $i = 0$  ou  $i = 1$ , les applications  $H^i(\mathbb{C}_v, \mathcal{Y}) \rightarrow H^i(k_v, Y)$  (induites par l'inclusion  $\mathbb{C}_v \rightarrow k_v$ ) sont des isomorphismes.*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{F}_v$  le corps résiduel de  $\mathbb{C}_v$  et  $\tilde{G}$  la réduction de  $\mathcal{G}$  modulo  $v$ . On a  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) = H^1(\mathbf{F}_v, \tilde{G})$ ; voir [Milne 1980], remarque 3.11a. D'autre part, comme  $\tilde{G}$  est connexe, on a  $H^1(\mathbf{F}_v, \tilde{G}) = 0$  par le théorème de Lang, d'où la première assertion. La seconde assertion pour  $i = 0$  résulte de ce que  $\mathcal{Y}$  est localement constant pour la topologie étale. Pour  $i = 1$ , elle vient de [Harari et Szamuely 2005], p. 105.  $\square$

Soit  $v \notin S$ . Alors  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(\mathbb{C}_v)$  s'injecte dans  $G(k_v)$  et d'autre part le lemme précédent dit que  $H^i(\mathbb{C}_v, \mathcal{Y})$  est isomorphe à  $H^i(k_v, Y)$  pour  $i = 0, 1$ ; on voit donc par dévissage que l'application naturelle  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(k_v, M)$  est injective, ce qui permet de noter encore  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  l'image de  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  dans  $H^0(k_v, M)$ . Notons que le groupe  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  est quasi-compact (il possède un sous-groupe ouvert d'indice fini qui est un quotient de  $\mathcal{G}(\mathbb{C}_v)$ ), mais pas séparé en général.

On pose  ${}^1H_r^0(k_v, M) = H^0(k_v, M)/H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  (avec une notation similaire si  $M$  est remplacé par  $T$ ) et on équipe ce groupe de la topologie quotient (pour la définition de la topologie sur  $H^0(k_v, M)$ , voir [Harari et Szamuely 2005], section 2).

**Lemme 2.** *Soit  $v \notin S$ . Alors le groupe  $H_r^0(k_v, M)$  est isomorphe à  $H_r^0(k_v, T)$ . C'est un groupe discret (autrement dit :  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  est un sous-groupe ouvert de  $H^0(k_v, M)$ ).*

Notons qu'en particulier le groupe  $H_r^0(k_v, M)$  est nul si  $M = Y[1]$  ou  $M = A$ . Rappelons aussi qu'un sous-groupe d'un groupe topologique est ouvert si et seulement si le quotient topologique correspondant est un groupe discret.

*Démonstration.* D'après le lemme 1, on a  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) = 0$ . On a alors un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{Y}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{Y}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^0(k_v, Y) & \longrightarrow & H^0(k_v, G) & \longrightarrow & H^0(k_v, M) & \longrightarrow & H^1(k_v, Y) & & \end{array}$$

La première et la quatrième flèche verticale sont des isomorphismes via le lemme 1. Par chasse au diagramme on est ramené au cas  $M = G$ . Comme  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{T}) = 0$

---

1. L'indice  $r$  signifie ici "ramifié"; je remercie le rapporteur pour cette suggestion de notation.

(lemme 1), on a un autre diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{T}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{A}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^0(k_v, T) & \longrightarrow & H^0(k_v, G) & \longrightarrow & H^0(k_v, A)
 \end{array}$$

La flèche verticale de droite est un isomorphisme par propriété de  $A$ . Une nouvelle chasse au diagramme nous donne alors l'isomorphisme voulu.

Enfin,  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{T})$  est un sous-groupe ouvert de  $H^0(k_v, T)$  parce que  $\mathbb{C}_v$  est un sous-groupe ouvert de  $k_v$  (prendre par exemple des équations affines de  $\mathcal{T}$  ; voir aussi [Platonov et Rapinchuk 1994], p. 134), ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

**Lemme 3.** *L'image de  $H^0(k, M)$  dans  $\mathbf{P}_S^0(M) / \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  est d'indice fini.*

Le groupe  $\mathbf{P}_S^0(M) / \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  est isomorphe au groupe  $\bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M)$ , qui est discret d'après le lemme 2. D'autre part, pour  $M = \mathbf{G}_m$ , le lemme 3 résulte juste de la finitude du groupe des classes d'idéaux de  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration.* On a  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) = 0$  via le lemme 1, ce qui donne un diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{Y}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathbf{P}_S^0(G) & \longrightarrow & \mathbf{P}_S^0(M) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^1(k_v, Y) & & 
 \end{array}$$

Comme on l'a déjà vu, la flèche verticale de droite est un isomorphisme ; de ce fait  $\mathbf{P}_S^0(G) / \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{G})$  se surjecte sur  $\mathbf{P}_S^0(M) / \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$ , ce qui permet de se ramener au cas  $M = G$ .

On écrit alors (en utilisant  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{T}) = 0$ ) le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{T}) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{A}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathbf{P}_S^0(T) & \longrightarrow & \mathbf{P}_S^0(G) & \longrightarrow & \prod_{v \notin S} H^0(k_v, A) & & 
 \end{array}$$

et la flèche verticale de droite est encore un isomorphisme. On est ainsi ramené au cas  $M = T$ , auquel cas le résultat vient de la finitude du groupe des classes d'idéaux d'un tore ; voir [Platonov et Rapinchuk 1994], Theorem 5.1.  $\square$

**Proposition 1.** *On suppose que les cardinaux des groupes finis  $\ker[H^1(U, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(k, T)]$  et  $H^1(k, Y)$  sont premiers entre eux (par exemple si  $Y = 0$ ). Alors la suite de groupes discrets  $0 \rightarrow H^0(U, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(k, M) \rightarrow \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M)$  est exacte.*

Notons que pour  $U$  assez petit l'application  $H^1(U, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(k, T)$  est injective (voir [Harari et Szamuely 2005], Corrigenda) et l'hypothèse sur les cardinaux est alors vérifiée.

*Démonstration.* L'injectivité de  $H^0(U, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(k, M)$  est démontrée dans [Harari et Szamuely 2005], Proposition 4.1(3). Le fait qu'on ait un complexe est clair car pour  $v \notin S$ , la flèche  $H^0(U, \mathcal{M}) \rightarrow H^0(k, M)$  se factorise par  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$ . Il reste donc à démontrer l'exactitude au milieu.

Montrons d'abord que le cardinal de  $H^1(U, \mathcal{Y})$  est premier avec celui de

$$\ker[H^1(U, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(k, G)].$$

Comme  $H^1(U, \mathcal{A})$  s'injecte dans  $H^1(k, A)$  (d'après [Milne 2006], lemme II.5.5) et  $H^0(U, \mathcal{A}) \simeq H^0(k, A)$ , le noyau de  $H^1(U, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(k, T)$  se surjecte sur celui de  $H^1(U, \mathcal{G}) \rightarrow H^1(k, G)$ . Mais la flèche  $H^1(U, \mathcal{Y}) \rightarrow H^1(k, Y)$  est un isomorphisme (via [Harari et Szamuely 2005], diagramme p. 112) donc l'hypothèse faite sur le cardinal de  $H^1(k, Y)$  donne le résultat voulu. Il en résulte que l'image de  $H^1(U, \mathcal{Y}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{G})$  s'injecte dans  $H^1(k, G)$ .

Maintenant, en utilisant le lemme 2, on obtient un diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(U, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^0(U, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{Y}) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(k, G) & \longrightarrow & H^0(k, M) & \longrightarrow & H^1(k, Y) & \longrightarrow & H^1(k, G) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, G) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M) & & & & \end{array}$$

Une chasse au diagramme permet alors de se ramener au cas  $M = G$ . Or, dans ce cas le résultat est clair car un  $k$ -point de  $G$  qui s'annule dans  $\bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, G)$  correspond à un morphisme  $\text{Spec } k \rightarrow \mathcal{G}$  qui s'étend en tout point de codimension 1 du schéma de Dedekind  $U$ , donc sur  $U$ . □

**Corollaire 1.** *On suppose que les cardinaux de  $H^1(k, Y)$  et  $\ker[H^1(U, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(k, T)]$  sont premiers entre eux. Alors la suite*

$$H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \rightarrow H^0(k, M)^\wedge \rightarrow \left[ \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M) \right]^\wedge$$

*est exacte.*



*Démonstration.* D'après le lemme 3, l'image  $I$  de  $H^0(k, M)$  dans le groupe discret  $\bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M)$  est d'indice fini, ce qui implique que l'application induite  $I^\wedge \rightarrow \left[ \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M) \right]^\wedge$  est injective. D'autre part la suite

$$H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \rightarrow H^0(k, M)^\wedge \rightarrow I^\wedge \rightarrow 0$$

est exacte d'après la proposition 1 et [Harari et Szamuely 2005], appendice, (2). Le corollaire en résulte.  $\square$

Rappelons que d'après le théorème 2.3 de [Harari et Szamuely 2005] on a un accouplement

$$(\cdot, \cdot)_v : H^0(k_v, M) \times H^1(k_v, M^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

lequel met en dualité parfaite le groupe discret  $H^1(k_v, M^*)$  et le groupe profini  $H^0(k_v, M)^\wedge$ . Pour  $v \notin S$ , on sait aussi ([Harari et Szamuely 2005], début de la preuve du théorème 2.10) que cet accouplement s'annule sur  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \times H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}^*)$ . Ceci nous permet de définir une flèche  $\theta$  de  $\mathbf{P}^0(M)$  dans le dual  $H^1(k, M^*)^D$  de  $H^1(k, M^*)$  par la formule

$$\theta(x).a = \sum_{v \in \Omega} (x_v, a_v)_v, \quad x \in \mathbf{P}^0(M), \quad a \in H^1(k, M^*)$$

où  $x_v$  est la composante de  $x$  en  $v$  et  $a_v$  la restriction de  $a$  à  $H^1(k_v, M^*)$  (qui est dans  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}^*)$  pour presque toute place  $v$ ). On a de même une flèche (notée  $\theta^\wedge$ ) de  $\mathbf{P}^0(M)^\wedge$  dans  $H^1(k, M^*)^D$ .

**Proposition 2.** *Supposons que les cardinaux de  $H^1(k, Y)$  et  $\ker[H^1(U, \mathcal{T}) \rightarrow H^1(k, T)]$  soient premiers entre eux et que le groupe de Tate-Shafarevitch  $\text{III}(A)$  de  $A$  soit fini. Alors on a une suite exacte de groupes profinis*

$$H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^0(M)^\wedge \xrightarrow{\theta} H^1(k, M^*)^D$$

*Démonstration.* On écrit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^0(U, \mathcal{M})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(M)^\wedge & \xrightarrow{\theta} & H^1(k, M^*)^D \\ \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \parallel \\ H^0(k, M)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(M)^\wedge & \xrightarrow{\theta^\wedge} & H^1(k, M^*)^D \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \left[ \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M) \right]^\wedge & \xrightarrow{=} & \left[ \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, M) \right]^\wedge & & \end{array}$$

La première colonne est exacte d'après le corollaire 1, la deuxième ligne est exacte d'après le théorème 5.6 de [Harari et Szamuely 2005] (ce qui implique déjà que la

première ligne est un complexe), et la colonne du milieu est un complexe car c'est la complétion d'une suite exacte. Par chasse au diagramme, il suffit, pour montrer l'exactitude au milieu de la première ligne, de montrer que la flèche  $i : \mathcal{P}_S^0(M)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(M)^\wedge$  est injective.

La preuve du lemme 5.3. de [Harari et Szamuely 2005] donne que pour tout  $n > 0$ , la flèche

$$\mathcal{P}_S^0(M)/n \rightarrow \prod_{v \in \Omega} H^0(k_v, M)/n$$

est injective. A fortiori la flèche

$$\mathcal{P}_S^0(M)/n \rightarrow \mathbf{P}^0(M)/n$$

est injective. Or  $\mathcal{P}_S^0(M)^\wedge$  est la limite projective des  $\mathcal{P}_S^0(M)/n$  car d'une part la complétion commute avec le produit, d'autre part on a

$$H^0(k_v, M)^\wedge = \varprojlim_n H^0(k_v, M)/n$$

pour  $v \in S$  et

$$H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})^\wedge = \varprojlim_n H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})/n$$

pour  $v \notin S$  comme on le voit par dévissage en utilisant le fait que  $H^0(k_v, T)/n$  et  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{T})/n$  sont finis,  $H^0(k_v, A) = H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{A})$  est profini, et  $H^1(k_v, Y) = H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{Y})$  est fini ([Milne 2006], corollaire I.2.3). En passant à la limite projective, on obtient alors que  $\mathcal{P}_S^0(M)^\wedge$  s'injecte dans la limite projective  $\mathbf{P}^0(M)_\wedge$  des  $\mathbf{P}^0(M)/n$ . On conclut avec l'injectivité de la flèche  $\mathbf{P}^0(M)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(M)^\wedge$ ; voir [Harari et Szamuely 2005], proposition 5.4 et diagramme (13).  $\square$

Soit  $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$  l'adhérence (pour la topologie produit) de  $H^0(U, \mathcal{M}) = H^0(\mathbb{C}_S, \mathcal{M})$  dans  $\mathcal{P}_S^0(M) = \prod_{v \in S} H^0(k_v, M) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$ .

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses de la proposition 2, on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow \overline{H^0(U, \mathcal{M})} \rightarrow \prod_{v \in S} H^0(k_v, M) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \xrightarrow{\theta} H^1(k, M^*)^D$$

*Démonstration.* La méthode est très similaire à celle de [Harari et Szamuely 2008], proposition 5.3. Le fait que la suite soit un complexe est clair par functorialité via le théorème 5.6 de [Harari et Szamuely 2005]. Soit  $C$  le quotient topologique de  $\mathcal{P}_S^0(M)$  par  $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$ . Le groupe  $C$  est séparé car  $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$  est fermé dans  $\mathcal{P}_S^0(M)$ . Montrons que  $C$  s'injecte dans sa complétion profinie  $C^\wedge$ . D'après [Harari et Szamuely 2005], appendice, il suffit de vérifier que  $C$  est engendré par une partie compacte. Or pour  $v$  dans  $S$ , le groupe  $H^0(k_v, M)$  a un sous-groupe d'indice fini qui est un quotient topologique de  $G(k_v)$ , lui-même engendré par une partie compacte via [Harari et Szamuely 2005], lemme 2.2; d'autre part pour  $v \notin S$ , le

groupe  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  est déjà quasi-compact. Ainsi  $C$  est bien engendré par une partie compacte.

On écrit alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \overline{H^0(U, \mathcal{M})} & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(M) & \longrightarrow & C \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (\overline{H^0(U, \mathcal{M})})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(M)^\wedge & \longrightarrow & C^\wedge
 \end{array}$$

La première ligne est exacte par définition de  $C$  et la deuxième ligne est un complexe par functorialité. Soit  $x$  un élément de  $\mathcal{P}_S^0(M)$  dont l'image dans  $H^1(k, M^*)^D$  est nulle. D'après la proposition 2, l'image  $y$  de  $x$  dans  $\mathcal{P}_S^0(M)^\wedge$  provient de  $H^0(U, \mathcal{M})^\wedge$ , donc a fortiori de  $(\overline{H^0(U, \mathcal{M})})^\wedge$  vu que la flèche  $H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^0(M)^\wedge$  se factorise par une flèche  $H^0(U, \mathcal{M})^\wedge \rightarrow (\overline{H^0(U, \mathcal{M})})^\wedge$ . Ainsi, l'image de  $y$  dans  $C^\wedge$  est nulle et on conclut avec l'injectivité de  $C \rightarrow C^\wedge$  et l'exactitude de la première ligne. □

**Remarque.** Il est facile de voir directement à partir de la proposition 1 que le corollaire 1 reste valable en remplaçant la complétion  $^\wedge$  par la "complétion partielle"  $^\wedge = \varprojlim_n \cdot/n$ . On obtient alors l'analogue (d'ailleurs plus simple à démontrer) de la proposition 2 avec cette complétion partielle grâce à la suite exacte (17) de [Harari et Szamuely 2005]. Cela suffit pour prouver le théorème 1 par la même méthode, tout en évitant les complications topologiques.

**Lemme 4.** Les groupes  $\mathbf{P}^0(M)$  et  $\mathbf{P}^0(M)^\wedge$  ont même image dans  $H^1(k, M^*)^D$  par les applications respectives  $\theta, \theta^\wedge$ .

*Démonstration.* On procède par dévissage. Notons  $\mathbf{P}^1(G)$  le produit restreint (pour  $v \in \Omega$ ) des  $H^1(k_v, G)$  relativement aux  $H^1(\mathbb{C}_v, \mathcal{G})$  (on emploiera de même les notations  $\mathbf{P}^1(Y)$  et  $\mathbf{P}^1(T)$ ). On a un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{P}^0(G) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(M) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(Y) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(G) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \parallel & & \downarrow \parallel \\
 \mathbf{P}^0(G)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(M)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(Y) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(G)
 \end{array}$$

En effet,  $\mathbf{P}^1(Y) = \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v, Y)$  est déjà compact et la complétion de la première ligne reste donc exacte en vertu de [Harari et Szamuely 2005], appendice. Ainsi  $\mathbf{P}^0(M)$  se surjecte sur le conoyau de  $\mathbf{P}^0(G)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(M)^\wedge$  et on est ramené à  $M = G$ . On se ramène ensuite par le même argument au cas  $M = T$  et  $M^* = Y^*[1]$

en utilisant le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{P}^0(T) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(G) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(A) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(T) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \parallel & & \downarrow \parallel \\
 \mathbf{P}^0(T)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(G)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(A) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(T)
 \end{array}$$

vu que  $\mathbf{P}^0(A) = \prod_{v \in \Omega} H^0(k_v, A)$  est compact. Maintenant on observe que

$$\mathbf{P}^0(T) / \overline{H^0(k, T)}$$

est compact en vertu de la finitude du groupe des classes d'idéaux d'un tore (noter ici l'importance d'avoir considéré les  $H^0$  modifiés à la Tate aux places archimédiennes). De ce fait l'image de  $\mathbf{P}^0(T)$  dans le groupe profini  $H^1(k, M^*)^D = H^2(k, Y^*)^D$  est fermée ; elle coïncide donc (par densité) avec l'image de  $\mathbf{P}^0(T)^\wedge$ . □

**Théorème 2.** *Soit  $M$  un 1-motif sur  $k$ . On suppose que  $\text{III}(A)$  est fini et on note  $\overline{H^0(k, M)}$  l'adhérence de  $H^0(k, M)$  dans le produit restreint  $\mathbf{P}^0(M)$ . Alors on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow \overline{H^0(k, M)} \rightarrow \mathbf{P}^0(M) \rightarrow H^1(k, M^*)^D \rightarrow \text{III}^1(M) \rightarrow 0$$

Ici la flèche  $H^1(k, M^*)^D \rightarrow \text{III}^1(M)$  est induite par la dualité parfaite entre les groupes finis  $\text{III}^1(M)$  et  $\text{III}^1(M^*)$ , par le corollaire 4.9 de [Harari et Szamuely 2005].

*Démonstration.* On commence par fixer un ensemble fini  $S$  de places tel que les hypothèses du théorème 1 soient satisfaites pour tout ouvert  $U$  de  $\text{Spec}(\mathbb{C}_S)$  (cf. commentaire après la proposition 1). Les trois premiers termes de la suite exacte s'obtiennent alors en appliquant le théorème 1 aux ensembles finis de places  $T \supset S$ , et en faisant la limite inductive sur  $T$ . D'après le théorème 5.6 de [Harari et Szamuely 2005], la suite

$$\mathbf{P}^0(M)^\wedge \rightarrow H^1(k, M^*)^D \rightarrow \text{III}^1(M) \rightarrow 0$$

est exacte. Comme  $\mathbf{P}^0(M)$  et  $\mathbf{P}^0(M)^\wedge$  ont même image dans  $H^1(k, M^*)^D$  d'après le lemme précédent, le résultat est démontré. □

**Remarques.** – On comparera avec le théorème 1.2 de [Harari et Szamuely 2008] : ici on considère l'adhérence de  $H^0(k, M)$  pour une topologie de *produit restreint* (et non plus de produit direct), c'est-à-dire que le groupe  $H^1(k, M^*)^D$  mesure le défaut d'approximation forte (tandis que le défaut d'approximation faible était mesuré par le groupe plus petit  $\text{III}_\omega^1(M^*)^D$ ). Bien entendu, si  $M = A$  est une variété abélienne, il n'y a pas lieu de distinguer entre les deux résultats et on retrouve la classique suite exacte duale de Cassels-Tate ([Milne 2006], théorème I.6.26).

– Le fait d’avoir considéré les  $\widehat{H}^0$  aux places archimédiennes entraîne que même si  $M$  est un tore, l’image de  $H^0(k, M)$  dans  $\mathbf{P}^0(M)$  n’est pas toujours fermée. Par exemple si  $M = \mathbf{G}_m$  et  $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ , alors le sous-groupe  $H$  de  $\mathbf{P}^0(\mathbf{G}_m)$  engendré par l’image de  $(1 + \sqrt{2})$  et celle de  $\{\pm 1\}$  est isomorphe à  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2$ ; d’après le théorème de Baire, le groupe  $H$  ne peut pas être compact car il est infini et dénombrable. Pourtant  $H$  est l’intersection de l’image de  $H^0(k, \mathbf{G}_m) = k^*$  avec le compact de  $\mathbf{P}^0(\mathbf{G}_m)$  constitué des éléments dont toutes les composantes aux places  $v$  non archimédiennes sont dans  $\mathbb{O}_v^*$ . Ainsi l’image de  $k^*$  dans  $\mathbf{P}^0(\mathbf{G}_m)$  ne peut pas être fermée.

– Dans le cas  $M = \mathbf{G}_m$ , le théorème 2 est essentiellement équivalent au cas où  $S$  contient toutes les places du corollaire 8.3.21 p. 464 de [Neukirch et al. 2008]. Le théorème 1 est malgré les apparences d’une nature un peu différente (et semble être nouveau même pour  $G = \mathbf{G}_m$ ).

### 3. Une variante

Le but de cette section est de démontrer une variante du théorème 1 qui fait intervenir deux ensembles finis de places, et d’en déduire un énoncé d’approximation pour les tores. On considère toujours  $M = [Y \rightarrow G]$  un 1-motif sur  $k$ , qui s’étend en un 1-motif  $\mathcal{M} = [\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{G}]$  au-dessus de  $U = \text{Spec}(\mathbb{O}_S)$ . Si  $v$  est une place non dans  $S$ , on note  $H_{\text{nr}}^1(k_v, M)$  l’image de  $H^1(\mathbb{O}_v, \mathcal{M})$  dans  $H^1(k_v, M)$  (voir [Harari et Szamuely 2005], section 2). Rappelons qu’on a supposé que  $S$  contenait toutes les places archimédiennes de  $k$ .

Soit  $S'$  un ensemble fini de places de  $k$  avec  $S \cap S' = \emptyset$ . On note  $\overline{H^0(\mathbb{O}_S, \mathcal{M})}^{S'}$  l’adhérence de  $H^0(\mathbb{O}_S, \mathcal{M}) = H^0(U, \mathcal{M})$  dans  $\prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{O}_v, \mathcal{M})$ . On note aussi  $H_{S, S'}^1(k, M^*)$  l’ensemble des  $\alpha$  de  $H^1(k, M^*)$  vérifiant  $\alpha_v = 0$  pour  $v \in S$  et  $\alpha_v \in H_{\text{nr}}^1(k_v, M^*)$  pour  $v \notin (S \cup S')$ . Enfin  $H_{S, \Omega}^1(k, M^*)$  désigne l’ensemble des  $\alpha$  de  $H^1(k, M^*)$  vérifiant  $\alpha_v = 0$  pour  $v \in S$  et  $\alpha_v \in H_{\text{nr}}^1(k_v, M^*)$  pour  $v \notin S$ .

**Lemme 5.** *On garde les hypothèses de la proposition 2. Posons*

$$I = \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)^\wedge \times \prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{O}_v, \mathcal{M}) \times \prod_{v \notin (S \cup S')} H^0(\mathbb{O}_v, \mathcal{M})^\wedge$$

et notons abusivement  $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$  l’adhérence de l’image de  $H^0(U, \mathcal{M})$  dans  $I$ . Alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \overline{H^0(U, \mathcal{M})} \rightarrow I \xrightarrow{\theta} H^1(k, M^*)^D$$

Notons que comme on va s’intéresser ensuite à une propriété d’approximation aux places de  $S'$ , on n’a besoin ici d’enlever les completions pour  $I$  que dans le facteur du milieu.

*Démonstration.* La preuve est tout à fait analogue (en plus simple) à celle du théorème 1, en remplaçant  $\mathcal{P}_S^0(M)$  par  $I$  (qui est quasi-compact, ce qui fait que le quotient de  $I$  par  $\overline{H^0(U, \mathcal{M})}$  est déjà profini).  $\square$

**Proposition 3.** *On garde les hypothèses et notations de la proposition 2. Soit  $S'$  un ensemble fini de places de  $k$  avec  $S \cap S' = \emptyset$ . Alors on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow \overline{H^0(\mathbb{C}_S, \mathcal{M})}^{S'} \rightarrow \prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \xrightarrow{\varphi} H_{S,S'}^1(k, M^*)^D \rightarrow H_{S,\Omega}^1(k, M^*)^D \rightarrow 0 \quad (*)$$

où l'application  $\varphi$  est définie par

$$\varphi((x_v)).a = \sum_{v \in S'} (x_v, a_v)_v \quad , \quad (x_v) \in \prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \quad , \quad a \in H_{S,S'}^1(k, M^*)^D$$

*Démonstration.* On note d'abord que le quotient topologique

$$\prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) / \overline{H^0(\mathbb{C}_S, \mathcal{M})}^{S'}$$

est séparé et quasi-compact, donc compact. De ce fait

$$\prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})^\wedge$$

ont même image dans  $H_{S,S'}^1(k, M^*)^D$ . On obtient l'exactitude des trois derniers termes de (\*) avec le théorème 2.10 de [Harari et Szamuely 2005], en dualisant la suite (qui est exacte par définition) :

$$0 \rightarrow H_{S,\Omega}^1(k, M^*) \rightarrow H_{S,S'}^1(k, M^*) \rightarrow \prod_{v \in S'} H^1(k_v, M^*) / H_{\text{nr}}^1(k_v, M^*)$$

D'autre part les trois premiers termes de (\*) forment un complexe vu que l'accouplement local entre  $H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$  et  $H_{\text{nr}}^1(k_v, M^*)$  est trivial.

Soit donc  $(x_v)_{v \in S'}$  dans  $\prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})$ , d'image nulle par  $\varphi$ . D'après le lemme 5, il suffit de montrer qu'il existe une famille

$$(x_v) \in \prod_{v \notin (S \cup S')} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})^\wedge$$

et une famille

$$(x_v) \in \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)^\wedge$$

vérifiant : l'image de la famille  $(x_v)_{v \in \Omega}$  dans  $H^1(k, M^*)^D$  (par la flèche  $\theta$  du lemme 5) est nulle.

Soit  $N$  le dual du groupe

$$\bigoplus_{v \in S} H^1(k_v, M^*) \oplus \bigoplus_{v \notin (S \cup S')} (H^1(k_v, M^*)/H_{\text{nr}}^1(k_v, M^*))$$

et posons

$$N' := \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)^\wedge \times \prod_{v \notin (S \cup S')} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M})^\wedge$$

On a alors un diagramme commutatif dont les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccc} N' & \xrightarrow{\psi} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \times N' & \xrightarrow{\theta} & H^1(k, M^*)^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) & \xrightarrow{\varphi} & H_{S, S'}^1(k, M^*)^D \end{array}$$

Comme  $\psi$  est un isomorphisme par dualité locale, on conclut par chasse au diagramme, en considérant l'élément de

$$I = \prod_{v \in S'} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{M}) \times N'$$

obtenu en complétant  $(x_v)_{v \in S'}$  avec des zéros. □

Soient maintenant  $T$  un  $k$ -tore de module des caractères  $Y$ , et  $S_0$  un ensemble fini de places de  $k$  (contenant les places archimédiennes) tel que les 1-motifs  $M = [0 \rightarrow T]$  et  $M^* = [Y \rightarrow 0]$  s'étendent en des 1-motifs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^* = [\mathfrak{y} \rightarrow 0]$  au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{C}_{S_0})$ . On note  $\text{III}_\omega^2(Y)$  l'ensemble des éléments  $\alpha$  de  $H^2(k, Y)$  tels que la localisation  $\alpha_v \in H^2(k_v, Y)$  soit nulle pour presque toute place  $v$  de  $k$ .

**Théorème 3.** *Avec les notations ci-dessus, on suppose que  $\text{III}_\omega^2(Y) = 0$ . Soit  $S'$  un ensemble fini de places de  $k$  ne rencontrant pas  $S_0$ . Alors il existe un ensemble fini de places  $S$  avec  $S \supset S_0$  et  $S \cap S' = \emptyset$ , vérifiant :  $T(\mathbb{C}_S)$  est dense dans  $\prod_{v \in S'} T(\mathbb{C}_v)$ .*

*Démonstration.* La structure des groupes de Lie  $p$ -adiques compacts donne qu'il existe un ensemble fini  $\Sigma$  de nombres premiers tels que pour  $\ell \notin \Sigma$ , le groupe  $\prod_{v \in S'} T(\mathbb{C}_v)$  soit  $\ell$ -divisible. D'après la proposition 3, il suffit alors de trouver  $S$  tel que la  $\ell$ -torsion  $H_{S, S'}^2(k, Y)[\ell]$  du groupe  $H_{S, S'}^2(k, Y)$  soit nulle pour tout  $\ell$  de  $\Sigma$ . En utilisant la suite exacte de  $\mathbb{C}_{S' \cup S_0}$ -schémas en groupes lisses

$$0 \rightarrow \mathfrak{y} \xrightarrow{1} \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{y}/\ell \rightarrow 0$$

on voit que  $H^1(\mathbb{C}_{S' \cup S_0}, \mathfrak{y}/\ell)$  (dont l'image dans  $H^1(k, Y/\ell)$  est finie via [Serre 1994], II.6.2., théorème 7) se surjecte sur  $H^2(\mathbb{C}_{S' \cup S_0}, \mathfrak{y})[\ell]$ . De ce fait il n'y a

qu'un nombre fini d'éléments non nuls de  $H^2(k, Y)[\ell]$  qui sont non ramifiés en dehors de  $(S_0 \cup S')$ ; pour chacun de ces éléments  $\alpha$ , on peut choisir une place  $v$  non dans  $(S_0 \cup S')$  avec  $\alpha_v \neq 0$  (grâce à l'hypothèse  $\text{III}_\omega^2(Y) = 0$ ). Il suffit alors de prendre pour  $S$  la réunion de  $S_0$  et de toutes ces places  $v$ .  $\square$

**Remarques.** – Il n'est pas étonnant de voir apparaître ici l'hypothèse  $\text{III}_\omega^2(Y) = 0$ , qui permet ([Sansuc 1981], théorème 8.12) d'avoir l'approximation faible pour  $T$  (dont le théorème 3 est un raffinement).

– Il n'est pas raisonnable d'attendre un analogue du théorème 3 pour une variété semi-abélienne  $G$ . En effet si  $G$  s'écrit comme extension d'une variété abélienne non nulle  $A$  par un tore  $T$  (dont on note encore  $Y$  le module des caractères), alors  $H^1(k, A^*)$  est infini donc aussi son image dans  $H^1(k, M^*)$  (en effet  $H^1(k, Y)$  est fini). Or cette image est incluse dans  $\text{III}_\omega^1(M^*)$ : en effet toute classe de  $H^1(k, A^*)$  est non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places (donc nulle en dehors de ces places par connexité de  $A$ , voir lemme 1). Il en résulte que  $\text{III}_\omega^1(M^*)$  est infini, donc que (modulo finitude de  $\text{III}(A)$ ) le défaut d'approximation faible pour  $G$  l'est également via [Harari et Szamuely 2008], théorème 1.2.

– On comparera le théorème 3 avec les résultats de [Naumann 2008], section 4.

#### 4. Application à l'obstruction de Manin pour les points entiers sur les toseurs

Rappelons ([Skorobogatov 2001], chapitre 5) que si  $X$  est une  $k$ -variété algébrique, on a un accouplement de Brauer-Manin

$$X(\mathbf{A}_k) \times \text{Br } X \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

entre les points adéliques de  $X$  et son groupe de Brauer. Le noyau à gauche de cet accouplement contient l'ensemble  $X(k)$  des points rationnels de  $X$ . Soit  $\mathcal{X}$  un modèle entier de  $X$ . On peut se demander si pour certaines classes de variétés, l'existence d'un point de  $\mathcal{X}(\mathbf{A}_\mathbb{C})$  dans le noyau ci-dessus implique l'existence d'un point entier sur  $X$ . Nous allons montrer qu'il en est ainsi si  $X$  est un espace principal homogène d'une variété semi-abélienne. Notons que cette problématique de l'obstruction de Manin entière a été formalisée pour la première fois dans [Colliot-Thélène et Fei 2007].

**Théorème 4.** *Soit  $\mathcal{X}$  un  $\mathbb{C}$ -schéma plat dont la fibre générique  $X$  est un espace principal homogène sous une variété semi-abélienne  $G$ . On suppose que le groupe de Tate-Shafarevitch  $\text{III}(A)$  du quotient abélien  $A$  de  $G$  est fini.*

*Soit  $S$  un ensemble fini de places de  $k$ , contenant les places archimédiennes. On suppose qu'il existe un point adélique  $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_S)$  qui est orthogonal à  $\text{Br}_1 X$  pour l'accouplement de Brauer-Manin. Alors il existe un point de  $\mathcal{X}(\mathbb{C}_S)$  qui est*



arbitrairement proche de  $P_v$  pour  $v \in S$  non archimédienne, et dans la même composante connexe de  $X(k_v)$  que  $P_v$  pour  $v$  réelle. En particulier, si on suppose de plus  $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_{\mathbb{C}})$ , alors  $\mathcal{X}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* La fibre générique  $X$  possède un point adélique orthogonal à  $\mathrm{Br}_1 X$  pour l'accouplement de Brauer-Manin. D'après [Harari 2006], théorème 1 (voir aussi [Harari et Szamuely 2008], théorème 1.1),  $X$  possède un point rationnel ; ceci implique qu'il existe un  $k$ -isomorphisme  $\varphi : X \simeq G$ . Quitte à agrandir  $S$  on peut supposer que  $\mathcal{G}$  s'étend en un schéma en groupes lisses  $\mathcal{G}$  au-dessus de  $\mathbb{C}_S$ , et que  $\varphi$  s'étend en un  $\mathbb{C}_S$ -isomorphisme  $\varphi_S : \mathcal{X}_S \rightarrow \mathcal{G}_S$ , où l'on a posé  $\mathcal{X}_S = \mathcal{X} \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_S$  (notation similaire pour  $\mathcal{G}$ ).

Considérons alors le point  $(Q_v) \in \mathcal{G}(\mathbf{A}_S)$  défini par  $Q_v = \varphi(P_v)$  pour toute place  $v$  de  $k$ . Notons  $(\tilde{Q}_v) \in \mathcal{P}_S^0(G) = \prod_{v \in S} H^0(k_v, G) \times \prod_{v \notin S} H^0(\mathbb{C}_v, \mathcal{G})$  l'image de  $(Q_v)$ . Par functorialité de l'accouplement de Brauer-Manin, on obtient que  $(Q_v)$  est orthogonal à  $\mathrm{Br}_1 G$ . Posons  $M = [0 \rightarrow G]$  et notons  $M^*$  le 1-motif dual. On a construit dans [Harari et Szamuely 2008] (section 4) une flèche

$$\iota : H^1(k, M^*) \rightarrow \mathrm{Br}_1 G / \mathrm{Br} k$$

qui est compatible (voir [Harari et Szamuely 2008], p. 22) avec l'accouplement de Brauer-Manin et les accouplements locaux, c'est-à-dire qu'on a, pour tout  $\alpha \in H^1(k, M^*)$  :

$$\sum_{v \in \Omega} (\alpha_v, \tilde{Q}_v)_v = (\iota(\alpha), Q_v)_{BM}$$

où  $(\cdot, \cdot)_{BM}$  est l'accouplement de Brauer-Manin et  $(\cdot, \cdot)_v$  est l'accouplement local  $H^1(k_v, M^*) \times H^0(k_v, M) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ .

Il en résulte que  $\tilde{Q}_v$  est dans le noyau de la flèche

$$\mathcal{P}_S^0(G) \rightarrow H^1(k, M^*)^D$$

du théorème 1. Ce théorème dit alors que  $(\tilde{Q}_v)$  est dans  $\overline{H^0(\mathbb{C}_S, \mathcal{G})}$ . Cela implique qu'il existe un point  $Q \in \mathcal{G}(\mathbb{C}_S)$  qui est arbitrairement proche de  $Q_v$  pour  $v \in S$  non archimédienne, et dans la même composante connexe de  $G(k_v)$  que  $Q_v$  pour  $v$  réelle. Il suffit alors de poser  $P_v = \varphi^{-1}(Q_v)$ .  $\square$

**Remarques.** – Dans le cas où  $G = A$  est une variété abélienne, le théorème 4 (dû dans ce cas à Y. Manin et L. Wang) est essentiellement une reformulation de la suite exacte duale de Cassels-Tate. Quand  $G = T$  est un tore, on obtient en particulier que *l'obstruction de Manin à l'existence d'un point entier est la seule pour un  $\mathbb{C}$ -schéma dont la fibre générique est un torseur sous un  $k$ -tore*. On comparera avec les théorèmes 3.7. et 4.5. de [Colliot-Thélène et Fei 2007]. Notons aussi que le théorème 4 a surtout un intérêt théorique dans la mesure où déjà pour un tore  $T$ , le

groupe  $\mathrm{Br}_1 T / \mathrm{Br} k$  est infini, donc l'obstruction a peu de chances d'être calculable en pratique.

– Ceci dit, si  $\mathcal{X}(\mathbb{C})$  est vide, seul un nombre fini d'éléments de  $\mathrm{Br} X$  est nécessaire pour obtenir une obstruction de Brauer-Manin entière. En effet le produit  $\mathcal{P}$  des  $\mathcal{X}(\mathbb{C}_v)$  est compact (en convenant que  $\mathcal{X}(\mathbb{C}_v)$  est l'ensemble des composantes connexes de  $X(k_v)$  si  $v$  est archimédienne). Si on note  $E_\alpha$  (pour  $\alpha$  dans  $\mathrm{Br} X$ ) le fermé de  $\mathcal{P}$  où  $\alpha$  s'annule, alors la condition  $\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \emptyset$  implique (d'après le théorème 4) que l'intersection de tous les  $E_\alpha$  est vide, donc par compacité qu'une intersection finie de tels  $E_\alpha$  est vide (remarque due à Colliot-Thélène).

En appliquant le théorème 4 au cas où  $G$  est un tore normique de dimension 1, on obtient :

**Exemple 1.** Soit  $\mathcal{X}$  une conique affine d'équation

$$ax^2 + by^2 = c \quad a, b, c \in \mathbb{C} \quad abc \neq 0$$

On note  $X$  la conique affine sur  $k$  associée. S'il existe pour toute place  $v$  de  $k$  une solution  $(x_v, y_v)$  dans  $\mathbb{C}_v \times \mathbb{C}_v$ , telle que le point adélique  $(P_v) = (x_v, y_v)_{v \in \Omega}$  soit orthogonal à  $\mathrm{Br}_1 X / \mathrm{Br} k$ , alors il existe une solution  $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .

Ceci répond à une question posée par Colliot-Thélène. Notons que même le cas où  $-b/a$  est un carré dans  $k^*$  (qui correspond au cas  $G = \mathbf{G}_m$  dans le théorème 4) n'est pas trivial.

### Remerciements

Ce travail a pour origine plusieurs discussions avec J.-L. Colliot-Thélène, et a bénéficié de ses commentaires ; je l'en remercie chaleureusement. Je remercie également le rapporteur pour plusieurs suggestions pertinentes.

### Références

- [Colliot-Thélène et Fei 2007] J.-L. Colliot-Thélène et X. Fei, "Brauer–Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms", prépublication, 2007. Voir <http://www.math.u-psud.fr/~colliot/CTXuFei4feb08.pdf>.
- [Harari 2006] D. Harari, "The Manin obstruction for torsors under connected algebraic groups", *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), Art. ID 68632. MR 2007b :14039 Zbl 1100.14013
- [Harari et Szamuely 2005] D. Harari et T. Szamuely, "Arithmetic duality theorems for 1-motives", *J. Reine Angew. Math.* **578** (2005), 93–128. MR 2006f :14053 Zbl 1099.14008
- [Harari et Szamuely 2008] D. Harari et T. Szamuely, "Local-global principles for 1-motives", *Duke Math. J.* **143** :3 (2008), 531–557.
- [Milne 1980] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980. MR 81j :14002 Zbl 0433.14012

- [Milne 2006] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, Second éd., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006. MR 2007e :14029 Zbl 1127.14001
- [Naumann 2008] N. Naumann, "Arithmetically defined dense subgroups of Morava stabilizer groups", *Compos. Math.* **144** :1 (2008), 247–270. MR 2388563 Zbl 1134.55006
- [Neukirch et al. 2008] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, 2nd éd., Grundlehren der Math. Wiss. **323**, Springer, Berlin, 2008. MR 2392026 Zbl 1136.11001
- [Platonov et Rapinchuk 1994] V. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Math. **139**, Academic Press, Boston, 1994. MR 95b :11039 Zbl 0841.20046
- [Sansuc 1981] J.-J. Sansuc, "Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres", *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), 12–80. MR 83d :12010 Zbl 0468.14007
- [Serre 1994] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 5ème éd., Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer, Berlin, 1994. MR 96b :12010 Zbl 0812.12002
- [Skorobogatov 2001] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR 2002d :14032 Zbl 0972.14015

Communicated by Bjorn Poonen

Received 2008-04-22

Revised 2008-05-26

Accepted 2008-06-26

David.Harari@math.u-psud.fr

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay,  
F-91405 Orsay Cedex, France

