Algebra & Number Theory

Volume 5

2011

No. 1

Formules pour l'invariant de Rost

Philippe Gille et Anne Quéguiner-Mathieu

mathematical sciences publishers

ALGEBRA AND NUMBER THEORY 5:1(2011)

Formules pour l'invariant de Rost

Philippe Gille et Anne Quéguiner-Mathieu

On donne une formule exacte pour l'invariant de Rost $H^1(k, G) \to H^3(k)$ des groupes linéaires spéciaux.

We provide an exact formula for the Rost invariant $H^1(k, G) \to H^3(k)$ of special linear groups.

1. Introduction et notations

Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k et $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu de k. Si G/k est un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple, on dispose de l'invariant de Rost [Esnault et al. 1998; Garibaldi et al. 2003]

$$r_G : H^1(k, G) \to H^3(k) := H^3(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2))$$

qui associe à la classe d'un G-torseur une classe de cohomologie galoisienne de degré 3, où pour $d \geq 0$, $H^{d+1}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(d))$ désigne le groupe de cohomologie galoisienne modifié à la Kato [1982] sur la composante p-primaire si k est de caractéristique p positive [Garibaldi et al. 2003, p. 151].

MSC2000: 11E72.

Mots-clefs: cohomologie galoisienne, Galois cohomology, linear algebraic groups, groupes algébriques linéaires.

Le premier but de cet article est d'établir une formule exacte pour l'invariant de Rost dans le cas du groupe $G = \mathrm{SL}_1(A)$, où A est une k-algèbre centrale simple. On sait alors que la suite exacte

$$1 \to \mathrm{SL}_1(A) \to \mathrm{GL}_1(A) \xrightarrow{\mathrm{Nrd}_A} \mathbb{G}_m \to 1$$

induit un isomorphisme $H^1(k, G) \cong k^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times)$, et que le cup-produit avec la classe de Brauer $[A] \in \mathrm{Br}(k) = H^2(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(1))$ engendre le groupe des invariants de degré 3 de $\mathrm{SL}_1(A)$ [Garibaldi et al. 2003, p. 107]. Pour comparer ce générateur et l'invariant de Rost, on convient d'identifier le groupe de Brauer de k et $H^2(k)$ par le cobord, comme dans [Gille et Szamuely 2006, §4.4]. Notons que cette convention est opposée à celle de [Garibaldi et al. 2003, p. 151], donnée par le produit croisé (voir [Knus et al. 1998, p. 397]).

Théorème 1.1. *Soit A une k-algèbre simple centrale de degré n. On note $[A] \in {}_n\mathrm{Br}(k) = {}_nH^2(k)$ sa classe dans le groupe de Brauer de k. Soit*

$$[v] \in H^1(k, \mathrm{SL}_1(A)) = k^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times).$$

(1) *Si l'indice* $\mathrm{ind}_k(A)$ *est inversible dans k, on a*

$$r_{\mathrm{SL}_1(A)}\big([v]\big) = (v) \cup [A] \in H^3(k),$$

où (v) désigne la classe dans ${}_nH^1(k) = k^\times/k^{\times n}$ d'un représentant quelconque de $[v]$.

(2) *Si k est de caractéristique $p > 0$ et A est d'indice p^h, alors*

$$r_{\mathrm{SL}_1(A)}\big([v]\big) = -(v) \cup [A] \in H^3(k).$$

Pour la définition du cup-produit dans le second cas, voir le § 4D.

La méthode employée consiste à utiliser des cocycles explicites pour des algèbres cycliques, l'ingrédient fondamental étant les extensions centrales de [Brylinski et Deligne 2001] qui permettent une approche galoisienne des extensions centrales de [Matsumoto 1969].

On propose ensuite deux applications du résultat principal. Le § 5 précise les résultats obtenus dans [Merkurjev et al. 2002] et [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007] concernant la restriction de l'invariant de Rost aux torseurs issus du centre du groupe. La seconde application concerne les groupes de type G_2, F_4 et E_8 dont le centre est trivial. Ces groupes possèdent un sous-groupe de la forme $A = \mu_l \times \mu_l \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ de centralisateur fini, et l'on donne au § 6 une description de l'invariant de Rost pour les torseurs issus de A. On en déduit (voir corollaire 6.7) que la partie modulo 3 de l'invariant de Rost coïncide avec l'invariant des algèbres d'Albert construit dans [Rost 1991], et décrit également dans [Petersson et Racine 1996].

2. Extensions de groupes

Dans toute cette partie, A désigne un groupe abélien, et

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1$$

est une extension d'un certain groupe G par A. On rappelle que l'action de E sur A par automorphisme intérieur se factorise en une action $\theta : G \to \mathrm{Aut}(A)$, ce qui munit A d'une structure de G-module. De plus, si l'on fixe une action de G sur A, les extensions de G par A qui induisent cette action sont classifiées par le groupe $H^2(G, A)$ (voir par exemple [Weibel 1994, §6.6]).

2A. ***Extensions de Γ-groupes.*** Soit Γ un groupe. On suppose ici que A, E et G sont des Γ-groupes et que l'extension ci-dessus est centrale et compatible à l'action de Γ. Elle donne lieu à une suite exacte longue d'ensembles pointés [Serre 1994, §I.5.4]

$$\begin{aligned}1 \to H^0(\Gamma, A) \to H^0(\Gamma, E) \to H^0(\Gamma, G) \to \\ H^1(\Gamma, A) \to H^1(\Gamma, E) \to H^1(\Gamma, G) \xrightarrow{\Delta} H^2(\Gamma, A).\end{aligned}$$

Nous nous proposons de donner une description du bord Δ en termes d'extensions de groupes. On rappelle que l'ensemble des 1-cocycles $Z^1(\Gamma, G)$ n'est pas autre chose que l'ensemble des sections de $G \rtimes \Gamma \to \Gamma$. En effet, si $z \in Z^1(\Gamma, G)$, on lui associe la section $u_z : \Gamma \to G \rtimes \Gamma$, $\sigma \mapsto z_\sigma\, \sigma$ (*ibid*, §5.1, exercice 1). Étant donné un 1-cocycle $z : \Gamma \to G$, on peut retirer en arrière par u_z l'extension

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \rtimes \Gamma \arrow[r] & G \rtimes \Gamma \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E(z) \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma \arrow[r] \arrow[u, "u_z"'] & 1. \end{tikzcd}$$

Lemme 2.1. $\Delta([z]) = \big[E(z)\big] \in H^2(\Gamma, A)$.

Démonstration. On vérifie par calcul. Pour chaque $\sigma \in \Gamma$, on choisit un relevé par $e_\sigma \in E$ de z_σ de sorte que z_e est l'élément neutre de E. Alors $\Delta([z])$ est par définition la classe du 2-cocycle

$$a_{\sigma,\tau} = e_\sigma\, {}^\sigma e_\tau\, e_{\sigma\tau}^{-1} \in A.$$

De l'autre coté, $f_\sigma := e_\sigma\, \sigma \in E(z)$ définit un relevé de σ pour le morphisme $E(z) \to \Gamma$. La classe de $E(z)$ dans $H^2(\Gamma, A)$ est celle du 2-cocycle (voir [Weibel 1994, th. 6.6.3])

$$f_\sigma\, f_\tau\, f_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma\, \sigma\, e_\tau\, \tau\, \tau^{-1}\sigma^{-1}\, e_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma\, (\sigma e_\tau \sigma^{-1})\, e_{\sigma\tau}^{-1} = e_\sigma\, {}^\sigma e_\tau\, e_{\sigma\tau}^{-1} = a_{\sigma,\tau}. \quad \square$$

On va maintenant établir une version tordue. Soit $z \in Z^1(\Gamma, G)$. On peut tordre l'extension $1 \to A \to E \to G \to 1$ par z

$$1 \to A \to {}_zE \to {}_zG \to 1$$

et étudier le bord $\Delta_z : H^1(\Gamma, {}_zG) \to H^2(\Gamma, A)$ [Serre 1994, §I.5.7]. Un 1-cocycle $w \in Z^1(\Gamma, {}_zG)$ est simplement une section u_w de la projection $G \rtimes^z \Gamma = {}_zG \rtimes \Gamma \to \Gamma$ via $\sigma \mapsto w_\sigma\, \sigma$. En appliquant la formule ci-dessus, on obtient que le bord $\Delta_z([w])$ est la classe de l'extension retirée en arrière

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \rtimes^z \Gamma \arrow[r] & G \rtimes^z \Gamma \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & E(w) \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma \arrow[r] \arrow[u, "u_w"] & 1.
\end{tikzcd}$$

2B. *Lemme préliminaire.* On s'intéresse aux sous-groupes suivants du groupe $\mathrm{Aut}(E)$ des automorphismes de E :

$$\mathrm{Aut}(E, A) = \big\{\phi \in \mathrm{Aut}(E) \mid \phi(A) = A\big\},$$
$$\mathrm{Aut}_A(E) = \big\{\phi \in \mathrm{Aut}(E) \mid \phi_{|A} = \mathrm{Id}_{|A}\big\}.$$

Lemme 2.2. *Le noyau de l'application naturelle* $\mathrm{Aut}_A(E) \to \mathrm{Aut}(G)$ *est en bijection avec le groupe* $Z^1(G, A)$ *des* 1*-cocycles de* G *à valeurs dans* A.

Démonstration. Soit $\alpha = (a_g) \in Z^1(G, A)$ un 1-cocycle. On lui associe l'application $\phi_\alpha : E \to E$, définie par $\phi_\alpha(x) = a_{p(x)}x$, pour tout $x \in E$. Quels que soient $x_1, x_2 \in E$, on a

$$\phi_\alpha(x_1x_2) = a_{p(x_1x_2)}\, x_1\, x_2 = a_{p(x_1)}\, x_1\, a_{p(x_2)}\, x_1^{-1} x_1\, x_2 = \phi_\alpha(x_1)\, \phi_\alpha(x_2).$$

Ainsi, ϕ_α est un morphisme, dont la restriction à A est l'identité. Son noyau, qui est contenu dans A, est trivial. Enfin, si $x \in E$, on a $x = \phi_\alpha(a_{p(x)}^{-1}x)$, de sorte que $\phi_\alpha \in \mathrm{Aut}_A(E)$. Comme $p(\phi_\alpha(x)) = p(x)$, l'automorphisme induit sur G est trivial.

Ainsi, l'application $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ est un morphisme de $Z^1(G, A)$ dans le noyau $\ker(\mathrm{Aut}_A(E) \to \mathrm{Aut}(G))$. Pour montrer qu'elle est bijective, on va exhiber sa réciproque. Soit donc $\phi : E \xrightarrow{\sim} E$ un automorphisme induisant l'identité sur A et sur G. L'application $x \in E \to \phi(x)x^{-1}$ induit une application $\psi : G = E/A \to A$. De plus, si g_1 et $g_2 \in G$ ont pour antécédents respectifs x_1 et $x_2 \in E$, alors

$$\psi(g_1g_2) = \phi(x_1x_2)(x_1x_2)^{-1} = \psi(g_1)x_1\, \psi(g_2)x_1^{-1} = \psi(g_1)\, \big(g_1.\psi(g_2)\big).$$

On a donc bien défini ainsi une application de $\ker(\mathrm{Aut}_A(E) \to \mathrm{Aut}(G))$ dans $Z^1(G, A)$, qui par un calcul direct est la réciproque de la précédente. $\square$

2C. *Extensions centrales d'un groupe parfait.* On suppose dans ce paragraphe que l'extension de groupes

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

est centrale. Autrement dit, A est contenu dans le centre $Z(E)$ de E, de sorte que l'action de G sur A est triviale. Si de plus le groupe G est parfait, alors $Z^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A) = 0$. Par le lemme précédent, le morphisme

$$\mathrm{Aut}_A(E) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G)$$

est donc injectif. On en déduit que deux automorphismes de $\mathrm{Aut}(E, A)$ qui induisent les mêmes morphismes sur A et sur G sont égaux, d'où un morphisme injectif

$$\mathrm{Aut}(E, A) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G).$$

Lemme 2.3. *On considère une extension centrale*

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

d'un groupe parfait G, et une action $f = (f_1, f_2) : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G)$ d'un groupe Γ sur A et sur G. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *L'image de f est incluse dans le sous-groupe*

$$\mathrm{Aut}(E, A) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G),$$

c'est-à-dire l'action f s'étend à E, et ce de manière unique ;

(2) *Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'extension $(f_2(\gamma)^{-1})^* \, f_1(\gamma)_*(E)$ de G par A est équivalente à E, où $(f_2(\gamma)^{-1})^*$ et $f_1(\gamma)_*$ désignent respectivement le pull-back et le push-out associés aux morphismes $f_2(\gamma)^{-1}$ et $f_1(\gamma)$.*

Démonstration. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on considère les extensions $E'_\gamma = f_1(\gamma)_*(E)$ et $E''_\gamma = (f_2(\gamma)^{-1})^* \, f_1(\gamma)_*(E)$. Par définition, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f_1(\gamma)"', "\wr"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E'_\gamma \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & E''_\gamma \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & G \arrow[r] \arrow[u, "f_2(\gamma)^{-1}"', "\wr"] & 1.
\end{tikzcd} \tag{2-1}$$

Supposons que l'action f s'étend à E, c'est-à-dire que $f(\gamma) \in \mathrm{Aut}(E, A)$. On a alors

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f_1(\gamma)^{-1}"', "\wr"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "f_2(\gamma)^{-1}"', "\wr"] & 1 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

En combinant avec (2-1), on en déduit que les extensions E et E''_γ sont équivalentes. Réciproquement, si les extensions E et E''_γ sont équivalentes, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E''_\gamma \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

qui, combiné avec (2-1), nous donne un automorphisme de E dont l'image dans $\mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G)$ est $(f_1(\gamma), f_2(\gamma))$. □

2D. ***Extension centrale d'un groupe abélien.*** Si le G-module A est trivial, par le théorème des coefficients universels, on a une suite exacte scindée

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G_{ab}, A) \to H^2(G, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(H_2(G, \mathbb{Z}), A) \to 0,$$

où $G_{ab} = G/[G, G] = H_1(G, \mathbb{Z})$ est l'abélianisé de G [Weibel 1994, exercice 6.1.5(3) et théorème 6.1.11]. Supposons de plus que $G = B$ est abélien. Alors $H_2(B, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 B$ [Brown 1982, théorème V.6.4(iii)] et la suite exacte devient

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(B, A) \to H^2(B, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\Lambda^2 B, A) \to 0.$$

De plus, par [Brown 1982, §V.6, exercice 5], l'image sous δ de la classe d'un cocycle $f \in Z^2(B, A)$ est donnée par $b_1 \wedge b_2 \mapsto f(b_1, b_2) - f(b_2, b_1)$. En combinant avec [Gille et Szamuely 2006, exemple 3.2.6], on en déduit aisément

Lemme 2.4. *Soit*

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} B \to 1$$

une extension centrale d'un groupe abélien B. L'image sous δ de sa classe dans $H^2(B, A)$ est le "relevé des commutateurs"

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^2 B & \to & A \\ b_1 \wedge b_2 & \mapsto & [e_1, e_2] = e_1 e_2 e_1^{-1} e_2^{-1}, \end{array}$$

où $e_i \in E$ vérifie $p(e_i) = b_i$.

Remarque 2.5. Soit $\phi : \Lambda^2 B \to A$ un morphisme ; on peut le voir comme une application bilinéaire alternée $B \times B \to A$, donc comme un 2-cocycle $\phi \in Z^2(B, A)$.

Il faut prendre garde que l'image sous δ de sa classe dans $H^2(B, A)$ est 2ϕ. En effet, puisque ϕ est alternée, la formule rappelée ci-dessus donne

$$\delta(\phi)(b_1 \wedge b_2) = \phi(b_1, b_2) - \phi(b_2, b_1) = 2\,\phi(b_1, b_2).$$

2E. ***Extensions d'un groupe cyclique.*** On suppose dans ce paragraphe que le groupe G est cyclique d'ordre n. Le choix d'un générateur $\sigma \in G$ permet d'identifier $H^2(G, A)$ avec le groupe $A^G/N(A)$ où N est l'application du G-module A dans lui même définie par $N(a) = \Sigma_{i=0}^{n-1}\sigma^i \cdot a$; voir par exemple [Gille et Szamuely 2006, exemple 3.2.9].

Lemme 2.6. *Soit G un groupe cyclique d'ordre n, de générateur σ, et soit*

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

une extension de G par A. Choisissons $e \in E$ tel que $p(e) = \sigma$. Alors, $e^n \in A^G$ et sa classe dans $A^G/N(A) \simeq H^2(G, A)$ est la classe de l'extension E.

Démonstration. Clairement, e^n est dans le noyau de p ; de plus, σ agissant sur A par conjugaison par e, l'élément e^n est invariant sous l'action de G. Montrons maintenant que sa classe dans $A^G/N(A)$ est celle de l'extension E.

Pour cela, on considère le caractère $\chi : G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associé au choix de σ, c'est-à-dire défini par $\chi(\sigma) = 1$, et le bord $\partial\chi \in H^2(G, \mathbb{Z})$ provenant de la suite exacte de G-modules

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0.$$

D'après [Gille et Szamuely 2006, 3.4.11(3)], l'isomorphisme entre $A^G/N(A)$ et $H^2(G, A)$ est le cup-produit par $\partial\chi$. En particulier, il est fonctoriel en A. Il suffit donc de montrer le théorème pour l'extension $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} G \to 1$, où p est définie par $p(1) = \sigma$. On vérifie facilement (voir exemple 3.2.6 du même ouvrage) que sa classe dans $H^2(G, \mathbb{Z})$ est représentée par le 2-cocycle

$$(\sigma^i, \sigma^j) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } i + j < n, \\ 1 & \text{si } i + j \geq n, \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que $\partial\chi$. Elle correspond donc, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^G/N(\mathbb{Z})$, à $\bar{1}$. Or, si l'on choisit $e = 1 \in \mathbb{Z}$ comme relevé de σ, on a $e^n = n$ qui a pour antécédent $1 \in A^G = \mathbb{Z}$. Le théorème est donc prouvé dans ce cas.

Le cas général s'en déduit de la manière suivante. Étant donnée l'extension

$$0 \to A \to E \xrightarrow{p} G \to 1,$$

le choix d'un élément $e \in E$ tel que $p(e) = \sigma$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] & G \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

où ϕ est définie par $\phi(1) = e$, de sorte que ψ vérifie $\psi(1) = e^n$. Ainsi, l'extension qui nous intéresse est le push-out suivant ψ de la précédente et l'élément correspondant dans $A^G/N(A)$ est la classe de $\psi(1) = e^n$. □

2F. ***Extensions de groupes et 2-extensions au sens de Yoneda.*** Fixons une action $\theta : G \to \mathrm{Aut}(A)$, de sorte que A est muni d'une structure de G-module. Le groupe $H^2(G, A)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ des 2-extensions de $\mathbb{Z}[G]$-modules au sens de Yoneda [Mac Lane 1963, IV, corollaire 5.2]. On va ici décrire explicitement cet isomorphisme en terme d'extensions de groupes et de G-modules.

Lemme 2.7. *Considérons une suite exacte de G-modules :*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{d} C \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

(1) *Pour tout $c \in C$, l'ensemble*

$$E_c = \big\{(g, b) \in G \times B \mid d(b) = g.c - c\big\},$$

est muni de la loi de groupe suivante $(g_1, b_1)(g_2, b_2) = (g_1g_2, b_1 + g_1.b_2)$. De plus, E_c est une extension de G par A d'action θ.

(2) *Si c et $c' \in C$ ont la même image dans $\mathbb{Z}$, alors les extensions E_c et $E_{c'}$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. (1) Si $d(b_i) = g_i.c - c$ pour $i = 1, 2$, on a

$$d(b_1 + g_1.b_2) = g_1.c - c + g_1.(g_2.c - c) = (g_1g_2).c - c.$$

Ainsi, la loi définie ci-dessus est bien une loi interne sur E_c ; on vérifie facilement qu'elle munit E_c d'une structure de groupe. En particulier, l'inverse de $(g, b) \in E_c$ est $(g, b)^{-1} = (g^{-1}, -g^{-1}.b)$.

Comme l'image dans $\mathbb{Z}$ de $g \cdot c - c$ est triviale, la projection $E_c \to G$ est surjective ; son noyau $\{(1_G, a),\ a \in A\}$ est isomorphe à A. Ceci prouve que E_c est une extension de G par A. De plus, l'action induite de G sur A est donnée par $(g, 0)(1_G, a)(g^{-1}, 0) = (g, g.a)(g^{-1}, 0) = (1_G, g.a)$, qui coïncide bien avec l'action initiale.

(2) Si c et c' ont la même image dans $\mathbb{Z}$, il existe $b_0 \in B$ tel que $c' = c + d(b_0)$. L'application

$$\begin{array}{ccc} E_c & \to & E_{c'} \\ (g, b) & \mapsto & (g, b + g \cdot b_0 - b_0), \end{array}$$

qui agit comme l'identité sur $\{(1_G, a),\ a \in A\}$, est un isomorphisme entre ces deux extensions. □

Proposition 2.8. *Soit* $0 \to A \to B \to C \to \mathbb{Z} \to 0$ *une suite exacte de* G*-modules. Sa classe dans* $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \simeq H^2(G, A)$ *est la classe de l'extension de groupes* $0 \to A \to E_c \to G \to 1$, *où* c *est un élément de* C *d'image* 1 *dans* $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Notons tout d'abord que, en vertu du lemme 2.7(2), la classe de l'extension E_c ne dépend pas du choix de $c \in C$ d'image 1 dans $\mathbb{Z}$.

Pour montrer la proposition, on utilise la description de l'opération inverse donnée dans [Mac Lane 1963, §IV.6], qui à une extension de groupe d'action θ

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \to 1$$

associe sa classe caractéristique dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. Notant $\mathbb{Z}[G]^{(E)}$ le G-module libre de base E, cette classe est représentée par

$$\chi(E): \qquad 0 \to A \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[G]^{(E)}/L \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

où L est engendré par $[1_G]$ et les $[e_1e_2] - p(e_1).[e_2] - [e_1]$ pour e_1, e_2 parcourant E. Les morphismes α et β sont définis respectivement par $\alpha(a) = [i(a)] \in \mathbb{Z}[G]^{(E)}/L$ et $\beta([e]) = [p(e)] - [1_G]$, pour tout $e \in E$. Enfin, ϵ est le morphisme d'augmentation.

L'élément $1_G \in \mathbb{Z}[G]$ a pour image 1 dans $\mathbb{Z}$. Pour montrer la proposition, il suffit donc de remarquer que l'application $e \in E \mapsto (p(e), [e])$ est un isomorphisme entre l'extension E_{1_G} associée à $\chi(E)$ suivant le lemme 2.7 et l'extension initiale E. □

Ce formalisme est bien commode quand on a affaire à une situation équivariante, c'est-à-dire quand on a une action

$$f = (f_1, f_2) : \Gamma \to \mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(G)$$

d'un groupe Γ sur A et sur G qui est compatible avec l'action de G sur A, c'est-à-dire telle que $f_1(\gamma)(g.a) = f_2(\gamma)(g) \cdot f_1(\gamma)(a)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$ et $a \in A$. En d'autres mots, on a une structure de $G \rtimes \Gamma$-module sur A définie par

$$(g\gamma).a = g.f_1(\gamma)(a).$$

Supposons que la suite exacte de G-modules

$$0 \to A \to B \to C \to \mathbb{Z} \to 0$$

est en réalité une suite de $G \rtimes \Gamma$-modules. Pour tout $c \in C$, on peut alors définir par le lemme 2.7 une extension E_c de G par A et une extension $\tilde{E}_c$ de $G \rtimes \Gamma$ par A. De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_c \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & \widetilde{E}_c \arrow[r] \arrow[d] & G \rtimes \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 1. \\
 & & \Gamma \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Gamma \arrow[d] & \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.9. *Si $c \in C^\Gamma$, alors le groupe Γ agit sur E_c ; de plus, $\widetilde{E}_c$ est isomorphe à $E_c \rtimes \Gamma$.*

Démonstration. Si c est invariant sous l'action de Γ, alors pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $(g, b) \in E_c$, le couple $(\gamma \cdot g, \gamma \cdot b)$ appartient à E_c. Ceci définit une action de Γ sur E_c. De plus, on peut vérifier que l'application $\tilde{E}_c \to E_c \times \Gamma$, qui à $(g\gamma, b)$ associe $\big((g, b), \gamma\big)$ induit un isomorphisme de groupes entre $\tilde{E}_c$ et $E_c \rtimes \Gamma$. □

3. Extensions de Brylinski–Deligne

3A. ***Rappels.*** Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple. On note $H^i(G, \mathcal{K}_j)$ les groupes de K^M-cohomologie de la variété G définis par les complexes de Gersten [Gille et Szamuely 2006, §8.1]. On a alors $H^0(G, \mathcal{K}_2) = K_2(k)$ et $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ (voir [Brylinski et Deligne 2001, proposition 4.6] si G est déployé et [Garibaldi et al. 2003, (6.7), (6.10) et (6.12), p. 116–118] pour le cas général). Ainsi, en revenant à définition de la cohomologie en termes de complexes de Gersten, le complexe de $G(k)$-modules

$$K_2(k(G)) \to \bigoplus_{x \in G^{(1)}} k(x)^\times \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in G^{(2)}} \mathbb{Z}$$

induit une 2-extension

$$0 \to K_2(k) \to K_2(k(G)) \to \mathfrak{X}(G) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

où

$$\mathfrak{X}(G) = \ker\Big(\bigoplus_{x \in G^{(1)}} k(x)^\times \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in G^{(2)}} \mathbb{Z}\Big).$$

Cette extension étant équivariante pour l'action de $G(k)$ par translation à gauche, elle définit une classe de $\operatorname{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G(k)]}(\mathbb{Z}, K_2(k)) = H^2(G(k), K_2(k))$. D'après la proposition 2.8, cette classe est représentée par l'extension centrale de Brylinski–Deligne

$$(\mathscr{E}(G, c, k)) \qquad\qquad 0 \to K_2(k) \to \mathscr{E}(G, c, k) \to G(k) \to 1,$$

où $c \in \mathscr{X}(G)$ est un élément d'image 1 dans $\mathbb{Z}$, et $\mathscr{E}(G, c, k)$ est définie comme dans le lemme 2.7(1). Notons que l'extension $\mathscr{E}(G, c, k)$, contrairement à sa classe, dépend explicitement du choix de c, dorénavant fixé.

Remarque 3.1. Dans l'article [Brylinski et Deligne 2001], cette extension n'est pas définie de cette façon alors qu'elle l'était dans une version préliminaire. Les deux constructions coïncident et c'est d'ailleurs celle présentée ici qui est utilisée dans [Gille 2000].

Notons $\operatorname{Aut}(G)$ le k-groupe algébrique des automorphismes de G. Le groupe $\operatorname{Aut}(G)(k)$ agit naturellement sur le complexe ci-dessus, d'où une action sur la 2-extension de $G(k)$-modules associée, qui est triviale sur $K_2(k)$. De plus, on a :

Lemme 3.2. (1) *L'action de* $\operatorname{Aut}(G)(k)$ *sur* $H^1(G, \mathscr{K}_2) = \mathbb{Z}$ *est triviale.*

(2) *Si* $G(k)$ *est parfait, alors l'extension de Brylinski–Deligne* $\mathscr{E}(G, c, k)$ *est canoniquement* $\operatorname{Aut}(G)(k)$*-équivariante.*

Démonstration.

(1) Considérons une représentation fidèle $\rho : G \rtimes \operatorname{Aut}(G) \to \mathrm{SL}_N$, et notons $\rho_0 : G \to \mathrm{SL}_N$ sa restriction à G. Le morphisme induit

$$\mathbb{Z} = H^1(\mathrm{SL}_N, \mathscr{K}_2) \xrightarrow{\rho_0{}^*} H^1(G, \mathscr{K}_2) = \mathbb{Z}$$

est la multiplication par un entier strictement positif d_{ρ_0}, l'indice de Dynkin de ρ_0 [Garibaldi et al. 2003, p. 122]. Soit maintenant $f \in \operatorname{Aut}(G)(k)$. Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{SL}_N \arrow[d, "\operatorname{Int}(\rho(1, f))"] \\ G \arrow[r, "\rho_0"] & \mathrm{SL}_N, \end{tikzcd}$$

on déduit le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1(G, \mathscr{K}_2) & H^1(\mathrm{SL}_N, \mathscr{K}_2) \arrow[l, "\rho_0{}^\star"'] \\ H^1(G, \mathscr{K}_2) \arrow[u, "f^\star"] & H^1(\mathrm{SL}_N, \mathscr{K}_2). \arrow[l, "\rho_0{}^\star"'] \arrow[u, "(\operatorname{Int}(\rho(1, f)))^\star"'] \end{tikzcd}$$

Or la flèche verticale de droite est l'identité de $\mathbb{Z}$ puisque l'action de SL_N sur lui-même par automorphismes intérieurs induit une action triviale de $\mathrm{SL}_N(k)$ sur

$H^1(\mathrm{SL}_N, \mathcal{K}_2)$ [Garibaldi et al. 2003, lemme 6.9]. Par commutativité du diagramme, il en est de même de celle de gauche, ce qui prouve la première assertion.

(2) La description explicite de $\mathcal{E}(G, c, k) \subset G(k) \times K_2(k(G))$ donnée par le lemme 2.7(1) montre que l'action de $f \in \mathrm{Aut}(G)(k)$ sur $G(k) \times K_2(k(G))$, induit une application

$$\mathcal{E}(G, c, k) \to \mathcal{E}(G, f.c, k),$$

qui vaut l'identité sur $K_2(k)$. Ainsi, $\mathcal{E}(G, f.c, k)$ n'est rien d'autre que le pull-back $(f^{-1})^\star(\mathcal{E}(G, c, k))$. Or, comme l'action de $\mathrm{Aut}(G)(k)$ sur $H^1(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ est triviale, les éléments c et $f.c$ ont la même image dans $\mathbb{Z}$. Par le lemme 2.7(2), on en déduit que les extensions de Brylinski–Deligne correspondante $\mathcal{E}(G, c, k)$ et $(f^{-1})^\star(\mathcal{E}(G, c, k))$ sont équivalentes. Enfin, $G(k)$ étant supposé parfait, ceci prouve que l'action de $\mathrm{Aut}(G)(k)$ s'étend à $\mathcal{E}(G, c, k)$ par le lemme 2.3. $\square$

3B. ***Action galoisienne.*** Soit maintenant L/k une extension galoisienne finie de groupe Γ. En poussant c dans $\mathfrak{X}(G_L)$, on obtient une extension centrale

$$\mathcal{E}(G, c, L): \qquad 0 \to K_2(L) \to \mathcal{E}(G, c, L) \to G(L) \to 1.$$

Lemme 3.3. *Si $G(L)$ est parfait, $\mathcal{E}(G, c, L)$ est une extension canoniquement $(\mathrm{Aut}(G)(L) \rtimes \Gamma)$-équivariante.*

Démonstration. Les groupes Γ et $\mathrm{Aut}(G)(L)$ agissent tous deux sur l'extension $\mathcal{E}(G, c, L)$ en vertu des lemmes 2.9 et 3.2(2). Il est clair que sur $K_2(L)$ et sur $G(L)$, ces deux actions sont compatibles, c'est-à-dire induisent un morphisme

$$\mathrm{Aut}(G)(L) \rtimes \Gamma \to \mathrm{Aut}(K_2(L)) \times \mathrm{Aut}(G(L)).$$

Or on vient de voir que les images de $\mathrm{Aut}(G)(L)$ et de Γ sont toutes deux incluses dans

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{E}(G, c, L), K_2(L)) \subset \mathrm{Aut}(K_2(L)) \times \mathrm{Aut}(G(L)).$$

Le morphisme ci-dessus se factorise donc bien par $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}(G, c, L), K_2(L))$. $\square$

Lemme 3.4. *On suppose $G(L)$ parfait. Soient $z \in Z^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(G)(L))$ un 1-cocycle et $\phi : G \times_k L \cong {}_zG \times_k L$ une trivialisation satisfaisant $z_\gamma = \phi^{-1}\gamma(\phi)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On pose*

$$d := \phi^*(c_L) \in \mathfrak{X}({}_zG \times_k L).$$

Alors l'extension tordue par z

$$0 \to K_2(L) \to {}_z\mathcal{E}(G, c, L) \to {}_zG(L) \to 1$$

est $(\mathrm{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma)$-isomorphe à l'extension $\mathcal{E}({}_zG, d, L)$.

Notons que la propriété galoisienne $\mathfrak{X}({}_zG) = \mathfrak{X}({}_zG \times_k L)^\Gamma$ est cruciale ici [Colliot-Thélène et Raskind 1985, proposition 3.6] pour savoir que $d \in \mathfrak{X}({}_zG)$.

Démonstration. La description explicite de ${}_z\mathscr{E}(G, c, L)$ et $\mathscr{E}({}_zG, d, L)$ donnée par le lemme 2.7(1) montre que ϕ induit un isomorphisme entre ces deux extensions de ${}_zG(L)$ par $K_2(L)$. Toutes deux sont $\mathrm{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$ équivariantes, mais il n'est pas clair à priori que l'isomorphisme entre les deux soit également équivariant. Le lemme 2.3 permet de le montrer sans aucun calcul ; il suffit en effet d'observer que l'action de $\mathrm{Aut}({}_zG)(L) \rtimes \Gamma$ sur $K_2(L)$ et ${}_zG(L)$ est la même pour chacune des deux extensions. □

La proposition qui suit est l'ingrédient clef pour effectuer des calculs. Elle repose sur le lien, établi dans [Gille 2000, Lemme 5], entre le bord associé à l'extension de Brylinski–Deligne, et l'invariant de Rost. Précisément, étant donné un 1-cocycle $z \in Z^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(G)(L))$, on y montre l'anti-commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1(\Gamma, {}_zG(L)) \arrow[r, "r_{{}_zG}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathrm{Ker}\big(H^3(k) \to H^3(L)\big) \arrow[d, equal] \\ H^2(\Gamma, K_2(L)) \arrow[r, "a_k^L"] & \mathrm{Ker}\big(H^3(k) \to H^3(L)\big), \end{tikzcd}$$

où $r_{{}_zG}$ désigne l'invariant de Rost, a_k^L est la flèche construite par B. Kahn [1993], et $\rho : H^1(\Gamma, {}_zG(L)) \to H^2(\Gamma, K_2(L))$ est le bord associé à l'extension de Brylinski–Deligne $\mathscr{E}({}_zG, d_0, L)$ pour un certain $d_0 \in \mathfrak{X}({}_zG)$ d'image 1 dans $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathscr{K}_2)$. On a alors :

Proposition 3.5. *On suppose $G(L)$ parfait. On se donne $u \in Z^1(\Gamma, {}_zG(L))$, vu comme une section du morphisme $G(L) \rtimes^z \Gamma \to \Gamma$, et on considère l'extension retirée en arrière*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2(L) \arrow[r] & \mathscr{E}(G, c, L) \rtimes^z \Gamma \arrow[r] & G(L) \rtimes^z \Gamma \arrow[r] & 1 \\ 0 \arrow[r] & K_2(L) \arrow[r] \arrow[u, equal] & E(z, u) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Gamma \arrow[r] \arrow[u, "u"] & 1. \end{tikzcd}$$

Alors on a

$$a_k^L\big(r_{{}_zG}([u])\big) = -\big[E(z, u)\big] \in H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

Démonstration. Comme on vient de l'expliquer, il suffit de calculer l'image de

$$[u] \in H^1(\Gamma, {}_zG(L))$$

sous le bord associé l'extension de Brylinski–Deligne $\mathscr{E}({}_zG, d_0, L)$, où $d_0 \in \mathfrak{X}({}_zG)$ est un élément d'image 1 dans $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathscr{K}_2)$. Si l'on prend $d_0 = \phi^*(c_L)$, le lemme 3.4 indique que l'on peut remplacer $\mathscr{E}({}_zG, d_0, L)$ par l'extension tordue ${}_z\mathscr{E}(G, c, L)$. La version tordue du lemme 2.1 montre que l'extension de groupes $E(z, u)$ ci-dessus représente la classe $\rho([u])$. □

4. Calculs explicites pour $\mathrm{SL}_1(A)$

4A. *Algèbres cycliques.*

Proposition 4.1. *Soient L/k une extension galoisienne cyclique de degré n et de groupe $\Gamma = \langle\sigma\rangle$, et $b \in k^\times$. On considère la k-algèbre cyclique*

$$A = (L/k, \sigma, b) = L \oplus Ly \oplus \cdots \oplus Ly^{n-1}$$

définie par les relations $y^n = b$ et $\lambda y = y\sigma(\lambda)$, pour $\lambda \in L$. Quel que soit $[v] \in k^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times) \cong H^1(\Gamma, \mathrm{SL}_1(A)(L))$, on a

$$a_k^L\big(r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])\big) = \big[\{v, b\}\big] \in K_2(k)/N(K_2(L)) \cong H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

Démonstration. Notons

$$f_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(k).$$

On rappelle [Gille et Szamuely 2006, §2.5] que l'algèbre A est la tordue $A = {}_zM_n(k)$ de $M_n(k)$ par le cocycle $z : \Gamma \to \mathrm{PGL}_n(L)$, défini par $\sigma^i \mapsto [f_b^i]$. Un point remarquable est que z est à valeurs dans $\mathrm{PGL}_n(k)$, c'est-à-dire définit un morphisme de groupes $\Gamma \to \mathrm{PGL}_n(k)$. On se donne également une trivialisation $\phi : M_n(L) \cong A \otimes_k L$ telle que $z_\tau = \phi^{-1}\tau(\phi)$ pour tout $\tau \in \Gamma$. Pour utiliser la proposition 3.5, on doit réaliser la classe $[u]$ par un cocycle $u \in Z^1(\Gamma, {}_z\mathrm{SL}_n(L))$. Le $\mathrm{SL}_1(A)$-torseur correspondant à v est donné par l'équation $v = \mathrm{Nrd}_A(y)$.

Notons $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ la base canonique des cocaractères du tore diagonal $\mathbb{G}_m^n$ de GL_n. L'élément $\phi(\lambda_1(v)) \in \mathrm{GL}_1(A)(L)$ satisfait

$$\mathrm{Nrd}_{A_L}(\phi(\lambda_1(v))) = \mathrm{Nrd}_{M_n(k)}(\lambda_1(v)) = \det(\lambda_1(v)) = v.$$

Un 1-cocycle représentant ce torseur est donc donné par

$$u_\sigma = \phi(\lambda_1(v))^{-1}\, \sigma(\phi(\lambda_1(v))) \in \mathrm{SL}_1(A)(L).$$

Vu comme section du morphisme $\mathrm{SL}_n(L) \rtimes^z \Gamma \to \Gamma$, ce cocycle est défini par l'homomorphisme $u : \Gamma \to \mathrm{SL}_n(L) \rtimes^z \Gamma$ donné par $\sigma \to t\,\sigma$, où

$$t = \lambda_1(v)^{-1}\lambda_2(v) = \begin{bmatrix} v^{-1} & 0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_n(L).$$

On se donne $c \in \mathcal{Z}(\mathrm{SL}_n)$ d'image 1 dans $H^1(\mathrm{SL}_n, \mathcal{K}_2)$. On considère alors l'extension retirée en arrière

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_2(L) \arrow[r] & \mathscr{E}(\mathrm{SL}_n, c, L) \rtimes^z \Gamma \arrow[r] & \mathrm{SL}_n(L) \rtimes^z \Gamma \arrow[r] & 1 \\ 0 \arrow[r] & K_2(L) \arrow[r] \arrow[u, equal] & E(z,u) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Gamma \arrow[r] \arrow[u, "u"] & 1 \end{tikzcd}$$

dont on va calculer la classe. Suivant le lemme 2.6, celle-ci est donnée par l'élément

$$(\tilde{t}\,\sigma)^n \in K_2(L) \subset \mathscr{E}(\mathrm{SL}_n, c, L) \rtimes^z \Gamma$$

où $\tilde{t}$ désigne un relevé de t dans $\mathscr{E}(\mathrm{SL}_n, c, L)$ que l'on choisit bien sûr provenant de $\mathscr{E}(\mathrm{SL}_n, c, k)$. En utilisant la forme précise du cocycle z, on écrit alors

$$\begin{aligned} (\tilde{t}\,\sigma)^n &= \tilde{t}\,(\sigma\tilde{t}\sigma^{-1}) \cdots (\sigma^{n-1}\,\tilde{t}\,\sigma^{1-n}) \\ &= \tilde{t}\,(f_b.\sigma(\tilde{t})) \cdots (f_b^{n-1}.\sigma^{n-1}(\tilde{t})) \\ &= \tilde{t}\,(f_b.\tilde{t}) \cdots (f_b^{n-1}.\tilde{t}) \in \mathscr{E}(\mathrm{SL}_n, c, L). \end{aligned} \tag{4-1}$$

Notant $T = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}_m^n \to \mathbb{G}_m)$ le tore maximal standard de SL_n et $T_{ad} = \mathbb{G}_m^n/\mathbb{G}_m$ celui de PGL_n, on a alors besoin de l'accouplement

$$h : T_{ad}(L) \times T(L) \to K_2(L)$$

défini par $h(x, y) = (x.\tilde{y})\tilde{y}^{-1}$ où $\tilde{y}$ est un relevé (arbitraire) de y dans $\mathscr{E}(\mathrm{SL}_n, c, L)$ [Brylinski et Deligne 2001, §4.13]. En pratique, h se calcule avec le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T_{ad}(L) \times & T(L) \arrow[r] \arrow[d] & K_2(L) \arrow[d, equal] \\ (L^\times)^n \arrow[u] \times & (L^\times)^n \arrow[r] & K_2(L) \\ (x_i) & (y_i) \arrow[r, mapsto] & \sum_{i=1}^n \{x_i, y_i\}. \end{tikzcd}$$

Écrivons $f_b = \lambda_1(b)\, f_1$ et $f_b^i = (\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b))\, f_1^i$ $(i = 1, \dots, n-1)$. Vu que f_1 normalise le tore T, on a $f_1^i.\tilde{t} \in T(L)$. Par suite,

$$f_b^i.\tilde{t} = (\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b)).(f_1^i.\tilde{t}) = h\big(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b),\, f_1^i.t\big)\, f_1^i.\tilde{t}.$$

Reportant ceci dans (4-1), on obtient

$$(\tilde{t}\,\sigma)^n = \alpha \times \tilde{t}\,(f_1.\tilde{t}) \cdots (f_1^{n-1}.\tilde{t}),$$

où $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} h\big(\lambda_1(b) \cdots \lambda_i(b),\, f_1^i.t\big) \in K_2(L)$. Le terme de droite,

$$\tilde{t}\,(f_1.\sigma(\tilde{t})) \cdots (f_1^{n-1}.\sigma^{d-1}(\tilde{t})),$$

étant celui du cas $b=1$, est inessentiel ; il appartient donc à l'image de $N : K_2(L) \to K_2(L)$. Il reste donc à calculer le premier terme α. Vu que $t = \lambda_1(v)^{-1}\lambda_2(v)$, on a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} h\big(\lambda_1(b)\cdots\lambda_i(b),\ \lambda_i(v)^{-1}\lambda_{i+1}(v)\big) = \sum_{i=1}^{n-1} \{b, v^{-1}\} = -(n-1)\{b, v\}.$$

On conclut que $[E(z,u)] = \{b, v\} \in K_2(L)^\Gamma/N.K_2(L)$, d'où la formule voulue par application de la proposition 3.5. □

4B. ***Calcul dans un cas particulier.***

Lemme 4.2. *Soit n un entier ≥ 1. On suppose que k admet une racine primitive n-ième de l'unité ζ_n. On pose $K = k((x))$ et on considère l'extension de Kummer $L = K(x^{1/n})$. On note σ le générateur de* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *défini par $\sigma(x^{1/n}) = \zeta_n\, x^{1/n}$ et $\chi \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ le caractère de* $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *appliquant σ sur* 1.

(1) *On a un isomorphisme*

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow[\sim]{\chi\cup h_n} \mathrm{Ker}\big(H^3(K) \to H^3(L)\big)$$

où $h_n : K_2(k)/nK_2(k) \to H^2(k, \mu_n^{\otimes 2})$ désigne le symbole galoisien.

(2) *Le composé*

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow[\sim]{\chi.h_n} \mathrm{Ker}\big(H^3(K) \to H^3(L)\big) \xrightarrow{a_K^L} H^2(\mathrm{Gal}(L/K), K_2(L))$$

est injectif et applique le symbole $\{x, y\} \in K_2(k)$ sur

$$\big[\{y, x\}\big] \in K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}/N.K_2(L) \cong H^2(\mathrm{Gal}(L/K), K_2(L)).$$

(3) *Soient $b, v \in k^\times$. On considère l'algèbre $A = (L/K, \sigma, b)$. Alors*

$$r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = (v) \cup [A] \in H^3(K).$$

Démonstration. (1) On observe tout d'abord que

$$\mathrm{Ker}\big(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(L, \mu_n^{\otimes 2})\big) \cong \mathrm{Ker}\big(H^3(K) \to H^3(L)\big).$$

On a un diagramme commutatif exact de suites exactes de résidus [Garibaldi et al. 2003, (8.4), p. 20]

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\partial_K} & H^2(k, \mu_n) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} & & \downarrow{\scriptstyle \times n} & & \\
0 & \longrightarrow & H^3(k, \mu_n^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\partial_K} & H^2(k, \mu_n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ceci produit un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}\big(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(L, \mu_n^{\otimes 2})\big) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}),$$

avec l'identification $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_n$ envoyant 1 sur ζ_n. La réciproque de cette application est donnée par le cup-produit par χ. En le combinant avec l'isomorphisme de Merkurjev–Suslin [1982]

$$h_n : K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \mu_n^{\otimes 2}),$$

on obtient un isomorphisme

$$K_2(k)/nK_2(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(L, \mu_n^{\otimes 2}))\big), \{u, v\} \mapsto \chi \cup h_n(\{u, v\}).$$

(2) Suivant [Gille 2000, lemme 2], on a

$$a_K^L\big(\chi \cup h_n(\{u, v\})\big) = -\{u, v\} \in K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}/N.K_2(L).$$

Il reste à vérifier que le morphisme $K_2(k)/nK_2(k) \to K_2(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}/N.K_2(L)$ est injectif. Cela découle du fait qu'il est scindé par la spécialisation

$$s : K_2(L) \to K_2(k), \quad \alpha \mapsto \partial_L\big((-x^{1/n}).\alpha\big),$$

où l'on voit $(-x^{1/n}).\alpha \in K_3^M(L)$.

(3) La proposition 4.1 indique que

$$a_K^L\big(r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])\big) = \big[\{v, b\}\big] \in K_2(L)^\Gamma/N.K_2(L) \cong H^2(\Gamma, K_2(L)).$$

Suivant (2), ceci entraîne

$$r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = \chi \cup h_n\big(\{b, v\}\big) = \chi \cup (b) \cup (v) = (v) \cup [A] \in H^3(K). \qquad \square$$

4C. *Démonstration du théorème 1.1.*

Lemme 4.3. *Soit n un entier ≥ 1 inversible dans k. Il existe un entier positif m tel que pour tout corps F/k et toute algèbre simple centrale A/F de degré n, l'invariant de Rost $F^\times/\mathrm{Nrd}(A^\times) \to H^3(F)$ est donné par $[v] \mapsto m\,(v) \cup [A]$.*

La démonstration passe par les torseurs versels [Garibaldi et al. 2003, p. 11].

Démonstration. Pour tout corps F/k, on définit

$$a_F : H^1(F, \mu_n \times \mathrm{PGL}_n) = F^\times/(F^\times)^n \times H^1(F, \mathrm{PGL}_n) \to H^3(F)$$

par

$$a_F\big((v), [A]\big) := \text{Invariant de Rost du } \mathrm{SL}_1(A)\text{-torseur } v = \mathrm{Nrd}_A(y).$$

Les a_F définissent un invariant cohomologique du groupe $\mu_n \times \mathrm{PGL}_n$. Notant $\mathcal{A}/k(X)$ une algèbre simple centrale "verselle" de degré n, on sait, selon [Garibaldi et al. 2003, théorème 11.5, p. 137], qu'il existe un entier m tel que

$$r\big([P_{k(X)(t)}]\big) = m\,(t) \cup [\mathcal{A}_{k(X)}] \in H^3(k(X)(t)).$$

Le principe de spécialisation [Garibaldi et al. 2003, (3.3), p. 109] nous permet de conclure que $a_F\big((v), [A]\big) = m\,(v) \cup [A]$ pour tout corps F/k, tout $c \in F^\times$ et toute F-algèbre simple centrale A. $\square$

Pour établir le théorème 1.1(1), on commence par le cas où n est inversible dans k. L'idée est de tester l'entier m sur un exemple. Plus précisément, il suffit d'exhiber une extension F/k, une algèbre A/F de degré n, et un élément $v \in F^\times$ tel que $r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v]) = (v) \cup [A]$ et tel que $r_{\mathrm{SL}_1(A)}([v])$ soit d'ordre exactement n.

Posons $F = \bar{k}((t))((y))((x))$. On note A l'algèbre cyclique sur F présentée par $X^n = x$, $Y^n = y$ et $XY = \zeta_n YX$. Alors $(t) \cup [A] = (t) \cup (x) \cup (y)$ est d'ordre n dans $H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On conclut que $m = 1$ par le lemme 4.2(3).

4D. ***Cas d'une p-algèbre.*** On suppose ici que k est de caractéristique $p > 0$ et que A est d'indice p^h. Si $d \geq 0$, rappelons la définition du groupe

$$H^{d+1}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(d)) = \bigcup_{m \geq 1} H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d)).$$

au moyen des différentielles logarithmiques. Pour tout schéma X de caractéristique p, on note $W_m\Omega_X^d$ le faisceau de de Rham–Witt sur $X_{\acute{e}t}$ de degré m et de poids d [Illusie 1979, I.1] et on note $W_m\Omega^q_{X,\log}$ le sous-faisceau de $W_m\Omega_X^d$ engendré localement pour la topologie étale par les différentielles logarithmiques

$$\mathrm{dlog}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(x_q).$$

On note $\nu_m(d)/X = W_m\Omega^d_{X,\log}$ et $\nu(d)/X = W_1\Omega^q_{X,\log}$.

Par définition, on a $H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(d)) = H^1(k, \nu_m(d)(k_s))$. Par ailleurs, le théorème de Bloch–Gabber–Kato [Bloch et Kato 1986] établit un isomorphisme canonique

$$K_d^M(k)/p^m K_d^M(k) \xrightarrow{\sim} \nu_m(d)(k), \quad \{x_1, \ldots, x_d\} \mapsto \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_d}{x_d}.$$

On a donc un isomorphisme

$$H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(d)) \xrightarrow{\sim} H^1\big(k, K_d^M(k_s)/p^m K_d^M(k_s)\big)$$

Pour tout entier $r \geq 0$, le produit

$$K_d^M(k_s)/p^m K_d^M(k_s) \times K_r^M(k_s)/p^m K_r^M(k_s) \to K_{r+d}^M(k_s)/p^m K_{r+d}^M(k_s)$$

induit le cup-produit

$$H^1\big(k, K_d^M(k_s)/p^m K_d^M(k_s)\big) \times H^0\big(k, K_r^M(k_s)/p^m K_r^M(k_s)\big) \\ \to H^1\big(k, K_{d+r}^M(k_s)/p^m K_{d+r}^M(k_s)\big).$$

Vu que $K_r^M(k)/p^m K_r^M(k) = H^0\big(k, K_r^M(k_s)/p^m K_r^M(k_s)\big)$, on a donc un cup-produit

$$H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d)) \times K_r^M(k)/p^m K_r^M(k) \to H^{d+r+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d+r)).$$

Rappelons que l'on a un isomorphisme $H^2(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(1)) \xrightarrow{\sim} {}_{p^m}\operatorname{Br}(k)$ (Kato, voir [Gille et Szamuely 2006, th. 9.2.4] dans le cas $m = 1$). En particulier, cela permet de voir la classe de $[A]$ dans $H^2(k, (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1))$.

Nous allons maintenant montrer que l'argument de relèvement en caractéristique nulle de l'invariant de Rost [Gille 2000, §5.1] fonctionne ici. Soit K un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique nulle et de corps résiduel k. On note O son anneau des entiers et $\mathcal{A}$ une R-algèbre d'Azumaya relevant la k-algèbre simple centrale A. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K^\times/\operatorname{Nrd}(\mathcal{A}_K^\times) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H^1(K, \operatorname{SL}_1(\mathcal{A}_K)) \arrow[r] & H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\
O^\times/\operatorname{Nrd}(\mathcal{A}^\times) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[u] \arrow[d] & H^1(O, \operatorname{SL}_1(\mathcal{A})) \arrow[u] \arrow[d] & \\
k^\times/\operatorname{Nrd}(A^\times) \arrow[r, phantom, "\cong"] & H^1(k, \operatorname{SL}_1(A)) \arrow[r] & H^3(k, (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(2)) \arrow[uu, "-i_k^K"']
\end{tikzcd} \tag{4-2}$$

où i_k^K désigne le morphisme (injectif) de relèvement de Kato qui satisfait aux compatibilités suivantes.

Lemme 4.4. (1) *On a*

$$i_k^K(\alpha \cup \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r\}) = i_k^K(\alpha) \cup \{u_1, \ldots, u_r\}$$

pour tous $u_1, \ldots, u_r \in O^\times$ *et* $\alpha \in H^{d+1}(k, (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})(d))$.

(2) $i_k([A]) = [\mathcal{A}_K] \in H^2(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1))$.

Démonstration. (1) Cela suit de la définition de i_k^K ; voir la preuve de [Kato 1982, proposition 2].

(2) Suivant le théorème d'Albert (voir [Gille et Szamuely 2006, §9.1]), A est semblable à une algèbre cyclique $B = (L/k, \sigma, \bar{b})$ (conventions du proposition 4.1) où k'/k est une extension cyclique de corps de groupe $\langle \sigma \rangle$ d'ordre p^s et $\bar{b} \in k^\times$. Sa classe dans le groupe de Brauer est $\chi \cup (\bar{b})$ où $\chi : \operatorname{Gal}(k'/k) \to \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ est le caractère appliquant σ sur 1 et $\bar{b} \in k^\times$ [Gille et Szamuely 2006, 4.7.3]. Soit O'/O une extension galoisienne cyclique relevant k'/k et $b \in O^\times$ un relevé de $\bar{b}$. Alors la O-algèbre d'Azumaya cyclique $\mathcal{B} = (O'/O, \sigma, b)$ relève B. On a $\mathcal{B}_K = (K'/K, \sigma, b)$ où $K' = \operatorname{Frac}(O')$ et sa classe dans $\operatorname{Br}(K)$ est $\Theta \cup (b)$ où $\Theta : \operatorname{Gal}(K'/K) \to \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ est le caractère appliquant σ sur 1. Mais par définition $i_k^K : H^1(k, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$ applique χ sur Θ, donc (1) permet de conclure que $i_k([B]) = [\mathcal{B}_K]$. □

Nous montrons le théorème 1.1(2). Étant donné $u \in O^\times$ de réduction $\bar{u} \in k$, on a

$$\begin{aligned} r_K([u]) &= (u) \cup [\mathscr{A}_K] && \text{[Cas de car. nulle]} \\ &= (u) \cup i_k^K[A] && \text{[Lemme 4.4(2)]} \\ &= i_k^K\big((\bar{u}) \cup [A]\big) && \text{[Lemme 4.4(1)].} \end{aligned}$$

Le diagramme (4-2) ci-dessus permet de conclure que $r_k([\bar{u}]) = -(\bar{u}) \cup [A]$.

5. Restriction au centre de l'invariant de Rost

Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple. On suppose dans cette partie que la caractéristique du corps k ne divise pas l'exposant du centre Z de G, de sorte que Z est lisse. On s'intéresse à la restriction ρ_G de l'invariant de Rost aux torseurs issus de Z, c'est-à-dire à la composée

$$H^1(k, Z) \to H^1(k, G) \to H^3(k),$$

où la première application est induite par l'inclusion de Z dans G et la seconde est l'invariant de Rost. L'ingrédient majeur pour faire ce calcul est la description des invariants des tores quasi-triviaux donnée dans [Merkurjev et al. 2002, théorème 1.1], qui montre qu'il existe une classe de cohomologie $t_{R,G} \in H^2(k, Z)$ telle que ρ_G est donné par un certain cup-produit avec $t_{R,G}$. On sait de plus que cette classe $t_{R,G}$ est, suivant le type du groupe G, soit la classe nulle, soit un multiple non trivial de la classe de Tits $t_G \in H^2(k, Z)$ (voir [Merkurjev et al. 2002] pour G de type classique ou [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007] pour G de type exceptionnel). Le théorème 1.1 permet d'énoncer le résultat plus précis suivant :

Corollaire 5.1. *Si G est de type A, C_ℓ avec ℓ impair, D, E_6 ou E_7, la restriction ρ_G de l'invariant de Rost aux torseurs issus du centre est le cup-produit avec la classe de Tits du groupe G, $t_G \in H^2(k, Z)$, le cup-produit étant induit par l'application bilinéaire $Z(k_s) \times Z(k_s) \to \mu_n^{\otimes 2}$ spécifiée pour chaque type de groupe dans* [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007, §2]. *Pour les autres groupes, ρ_G est nulle.*

Démonstration. Si le groupe G est de type ${}^1A_{\ell-1}$, il est de la forme $G = \mathrm{SL}_1(A)$ pour une certaine k-algèbre centrale simple A de degré ℓ, et il a pour centre $Z = \mu_\ell$. Par [Knus et al. 1998, (31.7)], avec l'identification que l'on a choisie entre le groupe de Brauer de k et $H^2(k)$, la classe de Tits de G est alors la classe de Brauer de l'algèbre A, $t_{\mathrm{SL}_1(A)} = [A] \in H^2(k, \mu_n)$, et le corollaire découle donc dans ce cas de la description de l'invariant de Rost donnée dans le théorème 1.1.

Quand la composée ρ_G est nulle, le résultat est prouvé dans [Merkurjev et al. 2002] ou [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007]. Pour les autres types de groupes, on sait (*loc. cit.*) que la restriction à $H^1(k, Z)$ de l'un des générateurs du groupe des invariants de degré 3 de G est le cup-produit avec la classe de Tits. De sorte que $t_{R,G}$

est de la forme $m\, t_G$, où m est un entier premier à l'indice de Dynkin n_G du groupe G. Si n_G est pair et Z d'exposant 2, alors m est impair et $m\, t_G = t_G \in H^2(k, Z)$. Le corollaire est ainsi prouvé pour G de type C_ℓ, D_ℓ avec ℓ pair et E_7.

Si G est de type E_6, la preuve de [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007, §11] montre que si l'invariant de Rost pour le groupe $\mathrm{SL}_1(D)$ est le cup-produit avec $m[D]$, alors $t_{R,G} = m\, t_G$. En combinant avec le théorème 1.1, on obtient donc le résultat annoncé.

Il reste à prouver le corollaire pour les groupes de type ${}^2A_{\ell-1}$, et pour les groupes de type D_ℓ avec ℓ impair. On commence par les formes extérieures de $A_{\ell-1}$.

Groupes de type ${}^2A_{\ell-1}$. L'argument présenté ici est essentiellement tiré de [Merkurjev et al. 2002]. Le groupe G est de la forme $G = \mathrm{SU}(B, \tau)$, où B est une algèbre centrale simple de degré ℓ sur une extension quadratique K de k, et τ est une involution K/k-semi-linéaire de B. Son centre est une forme tordue $Z = \mu_{\ell[K]}$ du groupe des racines ℓ-ièmes de l'unité.

Supposons tout d'abord que ℓ est impair. Par [Merkurjev et al. 2002, (6)], le groupe $\mu_{\ell[K]}$ s'insère dans une suite exacte impliquant des tores quasi-triviaux, et en considérant la suite induite en cohomologie, on observe que $H^2(k, Z)$ s'injecte dans $H^2(k, R_{K/k}(\mathbb{G}_m)) = \mathrm{Br}(K)$. On en déduit que la restriction

$$\mathrm{res}_{K/k} :\ H^2(k, Z) \to H^2(K, Z)$$

est injective. Or, par le cas intérieur, la différence $t_{R,G} - t_G \in H^2(k, Z)$ est nulle sur K. On a donc bien $t_{R,G} = t_G$.

Supposons maintenant que $\ell = 2m$ est pair. Dans ce cas, par [Merkurjev et al. 2002, proposition 5.2], l'application

$$(\lambda_\star, \mathrm{res}_{K/k}) :\ H^2(k, Z) \to H^2(k, \mu_2) \times H^2(K, \mu_n)$$

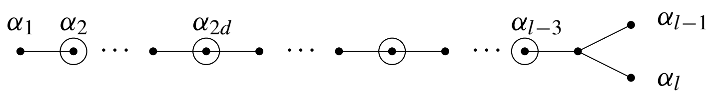
est injective, où $\lambda_\star$ est induite par l'élévation à la puissance m. A nouveau par le cas intérieur, $\mathrm{res}_{K/k}(t_{R,G}) = \mathrm{res}_{K/k}(t_G)$. Il reste donc à montrer que $\lambda_\star(t_{R,G}) = \lambda_\star(t_G)$, qui par [Knus et al. 1998, (31.8)] est la classe de Brauer de l'algèbre discriminante $\mathfrak{D}(B, \tau)$.

Pour cela rappelons que, par [Knus et al. 1998, (30.13)], le groupe $H^1(k, Z)$ est un quotient de $\{(x, y) \in k^\times \times K^\times \mid x^n = N_{K/k}(y)\}$. De plus, si on note $(x, y)_n$ la classe du couple $(x, y) \in k^\times \times K^\times$, alors par les calculs de [Merkurjev et al. 2002, p. 819], pour toute classe $\theta \in H^2(k, Z)$, le cup produit avec $(x, y)_n$ est donné par

$$(x, y)_n \cdot \theta = x \cdot \lambda_\star(\theta) + N_{K/k}(y \cdot \mathrm{res}_{K/k}(\theta)).$$

Ainsi, par [Merkurjev et al. 2002, §4.1], si l'algèbre B est déployée, alors $\lambda_\star(t_{R,G})$ est la classe de Brauer de l'algèbre discriminante $\mathfrak{D}(B, \tau)$, ce qui prouve que $\lambda_\star(t_{R,G}) = \lambda_\star(t_G)$ dans le cas déployé. Le cas général s'en déduit par extension des scalaires aux corps des fonctions E du transfert de K à k de la variété de Severi–Brauer de B (*loc. cit.*). En effet, E déploie B et la restriction $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(E)$ est injective.

Groupes de type D_ℓ avec ℓ impair. Supposons maintenant que G est de type D_ℓ avec ℓ impair. Son centre est μ_4 dans le cas intérieur, et une forme tordue $\mu_{4[K]}$ dans le cas extérieur. On sait alors que $t_{R,G}$ est égal à t_G ou $3t_G$, mais les arguments donnés dans [Merkurjev et al. 2002, §4.2.1, §4.3.1] ne permettent pas de lever l'ambiguïté. On va donc utiliser la méthode développée dans [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007], qui s'applique aussi aux groupes classiques. Nous présentons ici une esquisse de la preuve, comprenant les calculs qui ne figurent pas dans cet article-là, où le lecteur trouvera néanmoins certains détails des arguments. Rappelons d'abord que l'on peut supposer, pour calculer $t_{R,G}$, que le groupe G a un indice de Tits de la forme suivante [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007, §4] :



Le groupe G contient donc un k-tore déployé S' de rang $(\ell-3)/2$. Considérons le sous-groupe dérivé G' du centralisateur dans G de S'. C'est un groupe semi-simple simplement connexe, dont le diagramme de Dynkin est obtenu à partir du diagramme ci-dessus en supprimant les sommets entourés. C'est donc un produit de groupes de type A. De plus, par [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007, proposition 5.5], le centre Z de G est contenu dans G'. On va donc calculer ρ_G en passant par ce sous-groupe, et en utilisant le théorème 1.1.

Pour cela, il nous faut décrire précisément le groupe G' et l'inclusion de Z dans G'. Pour $i = 1, 3, \dots, \ell-4$, on note G'_i la composante de G' correspondant au sommet α_i du diagramme ; elle est de la forme $G'_i = \mathrm{SL}_1(Q_i)$, où Q_i est l'algèbre de Tits associée au poids fondamental ω_i. Or, en consultant les tables de [Bourbaki 1982], on observe que les poids $\omega_1, \omega_3 \dots, \omega_{\ell-4}$ sont égaux modulo le réseau des racines. Il découle donc de [Tits 1971, p. 211] (cf. également [Knus et al. 1998, (27.7)]) que les algèbres Q_i sont toutes isomorphes. Ainsi, on a $G'_i = \mathrm{SL}_1(Q)$ pour une certaine algèbre de quaternions Q. Notons maintenant G'_ℓ la composante associée au sous-diagramme de sommets α_ℓ, $\alpha_{\ell-2}$ et $\alpha_{\ell-1}$. L'algèbre de Tits correspondant au poids ω_ℓ est une algèbre de degré 4 sur k dans le cas intérieur et sur K dans le cas extérieur. Le groupe G'_ℓ est $G'_\ell = \mathrm{SL}_1(D)$ dans le premier cas et $G'_\ell = \mathrm{SU}(D,\tau)$ dans le second, où τ est une involution K/k semi-linéaire de D. De plus, à nouveau par [Knus et al. 1998, (27.7)], on a $[Q] = 2[D]$ dans le cas intérieur et $\mathrm{res}_{K/k}([Q]) = 2[D]$ dans le cas extérieur.

La description de l'inclusion de Z dans G' peut se faire au niveau de la clôture séparable k_s de k. Comme dans [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007, §8], le poids ω_ℓ étant d'ordre 4 dans le quotient Λ/Λ_r, l'application z_{ω_ℓ} associée par la proposition 6.2 du même article induit un isomorphisme entre μ_4 et Z. Avec les notations de [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007, §5.1], elle est donnée par

$$z_{\omega_\ell}(\zeta) = h_{4\omega_\ell}(\zeta) = h_1(\zeta^2)\, h_3(\zeta^2) \dots h_{\ell-4}(\zeta^2) h_{\ell-2}(\zeta^2) h_{\ell-1}(\zeta^{\ell-2})\, h_\ell(\zeta^\ell).$$

On peut décrire de manière analogue le centre de $\mathrm{SL}_1(D)$. En comparant les deux formules, on obtient que l'inclusion de Z dans le produit $Z'_1 \times Z'_3 \times \cdots \times Z'_{\ell-4} \times Z'_\ell$, où Z'_i désigne le centre de G'_i, est donnée par

$$\zeta \mapsto (\zeta^2, \dots, \zeta^2, \zeta^{\ell-2}).$$

Rappelons que le centre Z'_i est isomorphe à μ_2 pour $i = 1, 3, \dots, \ell-4$, tandis que Z'_l est isomorphe à Z. L'application induite au niveau des H^1 est donc

$$\begin{array}{rcc} H^1(k, Z) & \mapsto & \prod H^1(k, Z'_i) \\ a & \mapsto & (\lambda_\star(a), \dots, \lambda_\star(a), (\ell-2)a), \end{array}$$

où $\lambda_\star$ désigne comme précédemment l'application induite par l'élévation au carré. Pour conclure, il ne reste plus qu'à appliquer la formule [Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007, (5.8)].

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas intérieur. Si $\ell \equiv 3[4]$, on obtient

$$\rho_G(a) = (\ell-2)(a) \cdot [D] = (a) \cdot [D].$$

Si maintenant $\ell \equiv 1[4]$, on obtient

$$\rho_G(a) = \lambda_\star(a) \cdot [Q] + (3a) \cdot [D].$$

Or $(2a) \cdot [D] = (a) \cdot [2D] = \lambda_\star(a) \cdot [Q]$, qui est d'ordre 2 dans $H^3(k)$.

On obtient donc dans les deux cas $\rho_G(a) = (a) \cdot [D]$. Or, pour faire ce calcul, on a identifié μ_4 et Z par l'intermédiaire du poids ω_ℓ. Par [Knus et al. 1998, (31.7)], cette identification induit une application $H^2(k, Z) \to H^2(k, \mu_4)$ qui envoie la classe de Tits t_G sur la classe de Brauer de l'algèbre de Tits associée à ω_ℓ qui est justement $[D]$. Le corollaire est donc prouvé dans le cas intérieur.

Notons que l'on aurait aussi pu identifier Z et μ_4 en utilisant le poids $\omega_{\ell-1}$. Un calcul analogue montre qu'il faudrait alors remplacer $\ell - 2$ par ℓ dans la formule ci-dessus. Mais il faudrait également remplacer D par l'algèbre de Tits associée au poids $\omega_{\ell-1}$, qui est l'algèbre opposée D^{op}. Comme prévu, la formule ne dépend donc pas de l'identification choisie.

Dans le cas extérieur, un calcul analogue, conduit à $\rho_G(a) = a \cdot t_{G'_\ell}$. Si l'on identifie Z et Z'_ℓ à $\mu_{4[K]}$ par le poids ω_ℓ, en appliquant à nouveau [Knus et al. 1998, (31.7)], on observe que $\mathrm{res}_{K/k}(t_G) = \mathrm{res}_{K/k}(t_{G'_\ell}) = [D]$ et $\lambda_\star(t_G) = \lambda_\star(t_{G_\ell}) = [Q]$. Par [Merkurjev et al. 2002, proposition 5.2], ceci permet d'identifier $t_G = t_{G'_\ell}$, et termine la preuve. □

6. Groupes exceptionnels de type G_2, F_4 et E_8

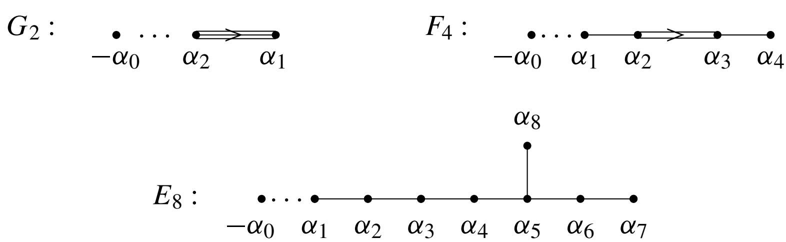
On note G le groupe déployé de type G_2 (resp. F_4, E_8). Il admet un unique (à $G(k_s)$-conjugaison près) k-sous-groupe $A = \mu_l \times \mu_l \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ avec $l = 2$ (resp. $l = 3$, $l = 5$) tel que $Z_G(A)$ est fini dont on va donner une description précise ci-dessous. On se propose de calculer le composé

$$H^1_{\mathrm{fppf}}(k, A) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(k, G) \to H^3(k),$$

le cas de G_2 étant bien connu des spécialistes. La théorie de la cohomologie plate [Berhuy et al. 2007, appendice B] n'est nécessaire que dans le cas de caractéristique l. Notons que ce type de torseurs intervient dans l'étude de la dimension essentielle de G [Reichstein et Youssin 2000; Chernousov et Serre 2006; Gille et Reichstein 2009].

Si n est un entier strictement positif, on note C_n le groupe cyclique d'ordre n et A_n le groupe alterné en n lettres.

6A. ***Sous-groupes finis.*** Soit T un tore déployé maximal de G et $W = N_G(T)/T$ son groupe de Weyl. On considère les diagrammes de Dynkin étendus respectifs



où α_0 désigne la plus grande racine. D'après [Borel et De Siebenthal 1949], ceci indique que G admet un sous-groupe H de type $A_1 \times A_1$ (resp. $A_2 \times A_2$, resp. $A_4 \times A_4$) dont le premier facteur contient le sommet $-\alpha_0$. On a $H = (\mathrm{SL}_l \times \mathrm{SL}_l)/\mu$ où $\mu \subset \mu_l \times \mu_l$ désigne le groupe fondamental de H.

Lemme 6.1. *Si l est inversible dans k, alors $H = Z_G(Z(H))$.*

Démonstration. Le fait que $H = Z_G(Z(H))^0$ fait partie du théorème de Borel – de Siebenthal ; voir [Gille 2010]. Il faut montrer la connexité de $Z_G(Z(H))$ et on peut supposer k algébriquement clos. Vu que $Z(H) = (\mu_l \times \mu_l)/\mu$ est cyclique et que G est simplement connexe, on sait que $Z_G(Z(H))$ est connexe d'après [Springer et Steinberg 1970, §3.9]. □

De façon plus précise, on va décrire $H = H'.H''$ au moyen d'un couple de Killing (T, B) de G. Celui-ci définit une base Δ du système de racines $\Phi(G, T)$; pour chaque $\alpha \in \Phi(G, T)$, on note $U_\alpha \subset G$ le sous-groupe radiciel associé. On pose $H' = \langle U'_+, U'_- \rangle$, $H'' = \langle U''_+, U''_- \rangle$, où $U'_\pm$ et $U''_\pm$ sont définis selon le cas par

	G_2	F_4	E_8
$U'_\pm$	$U_{\pm\alpha_0}$	$\langle U_{\pm\alpha_0}, U_{\pm\alpha_1} \rangle$	$\langle U_{\pm\alpha_0}, U_{\pm\alpha_1}, U_{\pm\alpha_2}, U_{\pm\alpha_3} \rangle$
$U''_\pm$	$U_{\pm\alpha_1}$	$\langle U_{\pm\alpha_3}, U_{\pm\alpha_4} \rangle$	$\langle U_{\pm\alpha_5}, U_{\pm\alpha_6}, U_{\pm\alpha_7}, U_{\pm\alpha_8} \rangle$

Ainsi le groupe H est muni du couple de Killing $(T, T.U'_+.U''_+) = (T, H \cap B)$ définissant les diagrammes de Dynkin Δ' et Δ''. On a $\Delta' = \{-\alpha_0\}$, resp. $\{-\alpha_0, \alpha_1\}$, resp. $\{-\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$; on note ω'_0, etc. les poids fondamentaux de H' et on identifie H' à SL_2 (resp. SL_3, SL_5) par la représentation de plus haut poids ω'_0. De même, $\Delta'' = \{\alpha_1\}$, resp. $\{\alpha_3, \alpha_4\}$, resp. $\{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$; on note ω''_1 (resp. ω''_3, ω''_4, etc.) les poids fondamentaux de H'' que l'on identifie à SL_2 (resp. SL_3, SL_5) par la représentation de plus haut poids ω''_1 (resp. ω''_3, resp. ω''_8). Nous allons déterminer le groupe μ en suivant la méthode de [Tits 1990, §1.7.1]. (Il est aussi possible d'utiliser la théorie des représentations, voir [Garibaldi 2009, p. 40] dans le cas E_8.)

Lemme 6.2. *Dans le cas de G_2 (resp. F_4), μ est le μ_2 (resp. μ_3) diagonal de* $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ (*resp.* $\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3$). *Dans le cas de E_8, μ est le sous-groupe μ_5 plongé de $\mu_5 \times \mu_5$ plongé par $x \mapsto (x, x^2)$.*

Démonstration. On note $T' = T \cap H'$, $T'' = T \cap H''$ et $\alpha_* = \alpha_2$ (resp. α_2, resp. α_4). Suivant [Tits 1990, §1.7.1], le dual $\hat{\mu}$ est le quotient de $\hat{T}' \oplus \hat{T}''$ par $\hat{T}$. De façon plus précise, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{T} \arrow[r] & \hat{T}' \oplus \hat{T}'' \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mu} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & & \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \arrow[r] & \hat{\mu} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et $\hat{T}$ est le sous-réseau de $\hat{T}' \oplus \hat{T}''$ engendré par les $\alpha_0^\vee(\omega_\alpha)\omega'_0 - \omega'_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta' \setminus \{\alpha_0\}$, $\alpha_0^\vee(\omega_{\alpha_*}) - \omega'_0$ et les $\alpha_0^\vee(\omega_\alpha) - \omega''_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta''$. Le fait que le premier facteur $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ soit engendré par ω'_0 et le second facteur $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ soit engendré par ω''_1 (resp. ω''_3, resp. ω''_8) simplifie la présentation du groupe $\hat{\mu}$. Pour l'étude cas par cas, on se refère aux tables de [Bourbaki 1982] renumérotées dans le cas de E_8 par Tits [1990].

Cas de G_2 : $\hat{\mu}$ est le quotient du sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par la relation

$$\omega'_0 + \alpha_0^\vee(\omega_2)\omega''_2 = \omega'_0 + \frac{(\alpha_0, \omega_2)}{(\alpha_0, \alpha_0)}\omega''_2 = \omega'_0 - \omega''_2$$

puisque $\alpha_0 = -\omega_2$. Ainsi μ est le noyau de $\mu_2 \times \mu_2 \to \mu_2$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

Cas de F_4 : $\hat{\mu}$ est le quotient du sous-groupe de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par la relation

$$\omega'_0 + \alpha_0^\vee(\omega_3)\omega''_3 = \omega'_0 + \frac{(\alpha_0, \omega_3)}{(\alpha_0, \alpha_0)}\omega''_3 = \omega'_0 - 2\omega''_3$$

puisque $\alpha_0 = -\omega_1$. Ainsi μ est le noyau de $\mu_3 \times \mu_3 \to \mu_3$, $(x, y) \mapsto xy^{-2}$.

Cas de E_8 : $\hat{\mu}$ est le quotient du sous-groupe de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ par la relation $\omega_0' + \alpha_0^\vee(\omega_8)\omega_5'' = \omega_0' - 3\omega_8''$. Ainsi μ est le noyau de $\mu_5 \times \mu_5 \to \mu_5$, $(x, y) \to xy^{-3}$ (voir aussi [Garibaldi 2009, p. 40]). □

On note h l'image respective de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{SL}_2(k),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_3(k) \times \mathrm{SL}_3(k),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_5(k) \times \mathrm{SL}_5(k)$$

dans $H(k)$. L'élément h est d'ordre $l = 2$ (resp. 3, 5) et agit de façon anisotrope à travers son image $w \in N_H(T)/T$ (c'est-à-dire T^w est fini). On pose $A = T^w \times \langle h \rangle$, il contient l'image $\mu_l^{(1)} = Z(H')$ du centre du premier facteur ainsi qu'un sous-groupe $\mu_l^{(2)}$ que l'on définit de la façon suivante. Pour G_2, c'est le sous-groupe de H

$$\mu_2 = \mu_4/\mu_2, \quad [x] \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix}.$$

Pour F_4 et E_6, c'est l'image du plongement $\mu_l \to H$ donné respectivement par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix},$$

$$x \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^8 \end{bmatrix}.$$

Lemme 6.3. *Dans les trois cas précédents, si l est inversible dans k, on a*

(1) $T^w = \mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)}$ *et* $A = \mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

(2) $Z_G(T^w) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ *et* $Z_G(A) = A$.

(3) $N_G(T^w) = N_G(T, T^w)$.

Démonstration. La première assertion est évidente puisque T^w se calcule dans H.

(2) On a $H = Z_G(Z(H))$ suivant le lemme 6.1 et $Z(H) \subset T^w$, d'où $Z_G(T^w) = Z_H(T^w)$. Il suit que $Z_G(T^w) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ puisque $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z} = Z_{S_l}(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. Vu que $T^w = T^A \subset A$, on en déduit $Z_G(A) = A$.

(3) Le k-groupe $N_G(T^w)$ normalise $T = Z_G(T^w)^0$. D'où on déduit $N_G(T^w) = N_G(T, T^w)$. □

On considère le morphisme

$$\phi : N_G(T, T^w) \to \mathrm{Aut}_{k-gp}(T^w) = \mathrm{Aut}_{k-gp}(\mu_l^{(1)} \times \mu_l^{(2)}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l).$$

Par ailleurs, on note $N_{\langle w \rangle}$ (resp. N_w) la préimage de $N_W(\langle w \rangle)$ (resp. $Z_W(w)$) dans $N_G(T)$.

Lemme 6.4. *On suppose que k est de caractéristique $\neq l$.*

(1) *On a des suites exactes de k-groupes*

$$1 \to T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to N_G(T, T^w) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}(T^w) \to 1$$

où $\mathrm{Aut}(T^w) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ *et*

$$1 \to A \to N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_l) \to 1,$$

où ϕ' est la restriction de ϕ à $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

(2) *L'inclusion $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \subset N_w$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_l) \xrightarrow{\sim} Z_W(w)/\langle w \rangle.$$

(3) *L'inclusion $N_G(T, T^w) \to N_{\langle w \rangle}$ est un isomorphisme et induit un isomorphisme* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle$.

(4) *Le morphisme*

$$N_G(T, T^w)(k) \xrightarrow{\phi} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l).$$

est surjectif.

(5) *Le morphisme*

$$N_G(T, T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_l).$$

est surjectif.

Pour établir (2), on va procéder cas par cas en utilisant la forme explicite du groupe fini $Z_W(w)$. Dans le cas de G_2, W est le groupe diédral d'ordre 12 et $\langle w \rangle$ est central, ainsi $Z_W(w) = W$. Dans les deux autres cas, la forme explicite de $Z_W(w)$ peut être relevée des tables de [Carter 1972] ou plus rapidement du fait que $Z_W(w)$

est un groupe de réflexion complexe [Springer 1974]. On a $Z_W(w) = C_6.A_4$ dans le cas F_4 et $Z_W(w) = C_{10}.A_5$ dans le cas E_8.

Démonstration du lemme 6.4. (1) On a

$$\ker(\phi) = N_G(T, T^w) \cap Z_G(T^w) = N_G(T, T^w) \cap \big(T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}\big) = T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$$

suivant le lemme 6.3(2). Pour la surjectivité de ϕ, on peut supposer k algébriquement clos. Suivant les tables de Griess [1991], puisque A est non toral, on a $N_G(A) = A \rtimes \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_l)$. L'image de $N_G(T^w) \cap N_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = N_G(A, T^w, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_l)$ est le sous-groupe des éléments de la forme

$$\begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

qui est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l)$. Ainsi $\mathrm{Im}(\phi) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l)$. La surjectivité de ϕ' résulte du même fait et le noyau de ϕ' est donné par $\ker(\phi') = \ker(\phi) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = (T \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = A$ suivant le lemme 6.3(2).

(2) Le morphisme $N_G(T, T^w) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \to N_w$ produit en effet un plongement $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_l) \hookrightarrow Z_W(w)/\langle w \rangle$, qui est un isomorphisme puisque ces deux groupes ont même ordre.

(3) De même, le morphisme $N_G(T, T^w) \to N_{\langle w \rangle}$ produit un plongement

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l) \hookrightarrow N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle.$$

Comme l'on a une suite exacte

$$1 \to Z_w \to N_{\langle w \rangle} \to Aut(\langle w \rangle) = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times,$$

on déduit en comptant que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}/\langle w \rangle$. Ainsi

$$N_G(T, T^w)/T \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}/T,$$

d'où l'on conclut que $N_G(T, T^w) \xrightarrow{\sim} N_{\langle w \rangle}$.

(4) Le morphisme $N_G(T)(k) \to W$ étant surjectif, le morphisme

$$N_{\langle w \rangle}(k) \to N_W(\langle w \rangle)$$

l'est également. En utilisant (3), on conclut que $N_G(T, T^w)(k) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_l)$ est surjectif.

(5) Si $r \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_l)$, le (4) produit un relevé $g \in N_G(T, T^w)(k)$ qui agit trivialement sur $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. □

Remarque 6.5. L'hypothèse sur la caractéristique est technique et peut probablement être levée dans les lemmes 6.1, 6.3 et 6.4.

6B. ***Calcul explicite.*** On a $H^1_{\mathrm{fppf}}(k, A) = k^\times/(k^\times)^l \times k^\times/(k^\times)^l \times H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, un élément est donc le produit de deux éléments $(a), (b) \in k^\times/(k^\times)^l$ et d'un caractère $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$.

Théorème 6.6. *Le composé*

$$r_G \circ i_k : H^1_{\mathrm{fppf}}(k, A) \to H^1_{\mathrm{fppf}}(k, G) \to H^3(k),$$

applique $(a) \times (b) \times \chi$ *sur* $-\chi \cup (a) \cup (b)$ *si* $l \in k^\times$ *et sur* $\chi \cup (a) \cup (b)$ *si* k *est de caractéristique* l.

Démonstration (s'appuyant principalement sur [Chernousov 1994]). On note $f = r_G \circ i_k$. On suppose que $G = E_8$, les deux autres cas étant similaires. Comme au Section 4D, l'argument de relèvement en caractéristique nulle [Gille 2000, théorème 2] permet le cas échéant de supposer que $\mathrm{car}(k) \neq l$. En outre, par restriction-corestriction, il est loisible de supposer que k contient une racine cinquième de l'unité ζ. On regarde d'abord la restriction au facteur

$$H^1(k, \mu_5^{(2)} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = k^\times/(k^\times)^5 \times H^1(k, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}).$$

Celle-ci définit un invariant cohomologique f' de $\mu_5^{(2)} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $H^3(k, \mu_5^{\otimes 2})$. La description de ces invariants est bien connue [Garibaldi 2009, proposition §2.1 et §6.7]. On sait alors qu'il existe (de façon unique !) des éléments $(c_0) \in k^\times/(k^\times)^5$, $\alpha_0 \in H^2(k, \mu_5^{(2)})$ et $\beta_0 \in H^2(k, \mu_5)$ tels que

$$f'\big((b) \times \chi\big) = (c_0) \cup (b) \cup \chi + \alpha_0 \cup \chi + (b) \cup \beta_0.$$

Vu que $\mu_5^{(2)} \subset T$ et que $H^1(k, T) = 0$, cet invariant est nul si $\chi = 0$, d'où $\beta_0 = 0$. De même, $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ se plonge dans un k-tore déployé, donc $\alpha_0 = 0$ et

$$f'\big((b) \times \chi\big) = (c_0) \cup (b) \cup \chi.$$

On note z l'image dans $Z^1(k, H)$ du cocycle $(b) \times \chi$. Suivant [Gille et Szamuely 2006, §2.5, 4.7], on a

$${}_zH = \big(\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(C)\big)/\mu$$

où $B = (\chi, b)$ et $C = (\chi, b^2)$ sont des k-algèbres cycliques de degré 5 (dans le cas de F_4, on a ${}_zH = \big(\mathrm{SL}_1(B) \times \mathrm{SL}_1(B)\big)/\mu$ avec $B = (\chi, b)$). On considère le diagramme commutatif [Gille 2000, lemme 7]

$$\begin{tikzcd} H^1(k, A) \arrow[r] \arrow[d, "? + (b) \cup \chi"'] & H^1(k, {}_zG) \arrow[r, "r_{{}_zG}"] \arrow[d, "\tau_z", "\wr"'] & H^3(k) \arrow[d, "? + f((b) \times \chi)"] \\ H^1(k, A) \arrow[r] & H^1(k, G) \arrow[r, "r_G"] & H^3(k) \end{tikzcd} \tag{6-1}$$

où τ_z désigne la bijection de torsion. Vu que le facteur $\mu_5^{(1)}$ s'applique sur le centre de $\mathrm{SL}_1(B)$, il vient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k^\times/(k^\times)^5 \arrow[r] \arrow[d, equal] & k^\times/\mathrm{Nrd}(B^\times) \arrow[r, "\sim"] & H^1(k, \mathrm{SL}_1(B)) \arrow[d] \\ k^\times/(k^\times)^5 = H^1(k, \mu_5^{(1)}) \arrow[r] & H^1(k, A) \arrow[r] & H^1(k, {}_zG). \end{tikzcd}$$

Nous affirmons que le composé $H^1(k, \mathrm{SL}_1(B)) \to H^1(k, {}_zG) \to H^3(k)$, la seconde flèche étant $r_{{}_zG}$, est l'invariant de Rost de $\mathrm{SL}_1(B)$. En effet, on sait par [Garibaldi et al. 2003, (9.11), p. 129] que ce composé est $d \times r_{\mathrm{SL}_1(B)}$ où d est l'indice de Dynkin (ou multiplicateur de Rost) du morphisme $\mathrm{SL}_1(B) \to {}_zG$. Cet indice correspond au morphisme $\mathbb{Z} = H^1({}_zG, \mathcal{K}_2) \to H^1(\mathrm{SL}_1(B), \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ et est donc le même que celui du morphisme $\mathrm{SL}_5 \to G$. Pour voir que ce multiplicateur est 1, on utilise le morphisme

$$\alpha_0^\vee : \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{SL}_5 \to G$$

attaché à la coracine (courte) $\alpha_0^\vee$ commune à SL_5 et G. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} = H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2) \arrow[r, "(\alpha_0^\vee)^*"] \arrow[d, "\times d"'] & H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{SL}_2, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z} = H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{SL}_5, \mathcal{K}_2) \arrow[r, "(\alpha_0^\vee)^*"] & H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{SL}_2, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Suivant [Garibaldi et al. 2003, (7.5), p. 121], les flèches horizontales sont $id_{\mathbb{Z}}$, d'où $d = 1$. Ainsi, l'image de (a) par le composé

$$k^\times/(k^\times)^5 = H^1(k, \mu_5^{(1)}) \to H^1(k, A) \to H^1(k, {}_zG) \to H^3(k)$$

est $(a) \cup \chi \cup (b)$ suivant le théorème 1.1. En remontant avec le diagramme (6-1), il vient

$$f\big((a) \times (b) \times \chi\big) = (a) \cup \chi \cup (b) - (c_0) \cup (b) \cup \chi.$$

On utilise maintenant l'action du groupe $N_G(T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k)$ sur G et A. Suivant le lemme 6.4(5), il existe $g \in N_G(T^w)(k) \cap Z_G(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})(k)$ qui agit sur T^w suivant

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5).$$

Vu que $G(k)$ agit trivialement sur $H^1(k, G)$, (a) et (b) jouent donc des rôles équivalents dans la formule cherchée, d'où la trivialité de (c_0) et de β_0. On conclut que

$$f\big((a) \times (b) \times \chi\big) = -(a) \cup (b) \cup \chi = -\chi \cup (a) \cup (b). \qquad \square$$

6C. *Algèbres d'Albert.* La partie modulo 3 de l'invariant de Rost des groupes de type F_4 définit un invariant des algèbres d'Albert. En application du théorème 6.6, nous montrons que c'est exactement l'invariant construit dans [Rost 1991], et décrit également dans [Petersson et Racine 1996].

Corollaire 6.7. *On suppose que* $\mathrm{car}(k) \neq 3$. *Soient* A/k *une algèbre simple centrale de degré* 3 *et* $\lambda \in k^\times$. *On note* $J(A, \lambda)$ *l'algèbre d'Albert de "première construction de Tits" et* $[J(A, \lambda)] \in H^1(k, F_4)$ *sa classe d'isomorphisme. Alors la partie modulo* 3 *de son invariant de Rost est*

$$g_3([J(A, \lambda)]) = [A] \cup (\lambda) \in H^3(k, \mu_3^{\otimes 2}).$$

La preuve passe par le lemme suivant :

Lemme 6.8. *Soit* G/k *un groupe semi-simple déployé. Soit* T/k *un tore maximal déployé de* G.

(1) *Soient* S_1, S_2 *des* k*-sous-groupes de* T. *Alors* S_1 *et* S_2 *sont* $G(k_s)$*-conjugués si et seulement si* S_1 *et* S_2 *sont* $G(k)$*-conjugués.*

(2) *Soient* H_1, H_2 *des sous-groupes réductifs déployés de* G *de rang maximal. Alors* H_1 *et* H_2 *sont* $G(k_s)$*-conjugués si et seulement si* H_1 *et* H_2 *sont* $G(k)$*-conjugués.*

Le (1) est bien connu dans le cas des sous-groupes finis constants d'ordre premier à la caractéristique [Serre 2010, 1.1.1] qui est d'ailleurs le cas d'application.

Démonstration. (1) Les k-groupes $G_1 = Z(S_1)^0$ et $G_2 = Z(S_2)^0$ sont réductifs et admettent T comme tore maximal. Si S_1 et S_2 sont $G(k_s)$-conjugués, il en est de même de G_1 et G_2 et ils sont alors $N_G(T)(k_s)$-conjugués. On pose $W = N_G(T)/T$, c'est un k-groupe fini constant et $N_G(T)(k) \to W$ est surjectif. Ainsi quitte à conjuguer par un élément de $G(k)$, on est ramené au cas où G_1 et G_2 sont $T(k_s)$-conjugués, d'où $S_1 = S_2$.

(2) On suppose donc que H_1 et H_2 sont $G(k_s)$-conjugués. On peut supposer que $T \subset H_i$ pour $i = 1, 2$ suivant le théorème de conjugaison de Borel–Tits. On pose $S_i = Z(H_i) \subset T$. A conjugaison de $G(k)$ près, le (1) montre que $Z(H_1) = Z(H_2)$. Par application du théorème de Borel de Siebenthal, il vient $H_1 = H_2$. □

Ainsi les sous-groupes semi-simples de F_4 qui sont déployés de type A_2^2 sont conjugués sous $F_4(k)$. On rappelle la présentation de F_4 donnée dans [Garibaldi 2009, §7.2]. On note $M = M_3(k)$ et $V = M \times M \times M$ qui est muni de la forme cubique

$$f(X, Y, Z) = \det(X) + \det(Y) + \det(Z) - \mathrm{Tr}(XYZ).$$

Le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ qui fixe $(I_3, 0, 0)$ et la forme f est le groupe F_4. L'action de $\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3$ sur V suivant

$$(A, C).(X, Y, Z) := (AXA^{-1}, AYC^{-1}, CYA^{-1})$$

fixe $(I_3, 0, 0)$ et la forme f ; son noyau est le μ_3 diagonal. En d'autres mots, on dispose d'un plongement

$$(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mu_3 \to F_4.$$

Ce groupe est $F_4(k)$-conjugué au groupe H considéré au § 6A, on peut donc abusivement le noter H aussi.

On va identifier le sous-groupe $\mathrm{PGL}_3 \times \mu_3$ de F_4 considéré dans [Garibaldi 2009, §7.2]. Le sous-groupe PGL_3 est le groupe diagonal $\mathrm{SL}_3 / \mu_3 \subset H = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mu_3$ et le μ_3 noté ici $\mu_3^{(4)}$ agit selon

$$\zeta.(X, Y, Z) = (X, \zeta Y, \zeta^2 Z).$$

Ainsi $\mu_3^{(4)}$ est le sous-groupe $(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mu_3$ donné par

$$\zeta \mapsto \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire le sous-groupe $\mu_3^{(1)}$. On dispose par ailleurs du sous-groupe $\mu_3^{(5)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de PGL_3 donné par les générateurs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On observe que son image dans H est le sous-groupe $\mu_3^{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ainsi

$$\mu_3^{(1)} \times \mu_3^{(2)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mu_3^{(4)} \times \mu_3^{(5)} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Démonstration de la corollaire 6.7. Si A est déployée, $J(A, \lambda)$ est triviale et la formule également. Si A est un corps gauche on sait d'après Wedderburn que A est cyclique, c'est-à-dire $A = (L/k, \sigma, b)$ avec les conventions de la proposition 4.1. Sa classe dans $H^1(k, \mathrm{PGL}_3)$ est l'image de $(\chi, (b))$ par la flèche

$$H^1(k, \mu_3) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(k, \mathrm{PGL}_3).$$

Or l'image de

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, \mu_3^{(1)}) \times H^1(k, \mu_3^{(2)}) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(k, \mu_3^{(1)}) \times H^1(k, \mathrm{PGL}_3) \\ & & \downarrow \\ & & H^1(k, F_4) \end{array}$$

applique $(a) \times (b) \times \chi$ sur $J(A, a)$ d'après [Knus et al. 1998, corollaire 39.9]. Suivant le théorème 6.6, le composé

$$H^1(k, \mu_3^{(1)}) \times H^1(k, \mu_3^{(2)}) \times H^1(k, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(k, F_4) \xrightarrow{r} H^3(k)$$

applique $(a) \times (b) \times \chi$ sur $-\chi \cup (a) \cup (b)$, ce qui permet de conclure que

$$g_3(J(A, a)) = -\chi \cup (a) \cup (b) = [A] \cup (a). \qquad \square$$

Remerciements

Nous remercions Skip Garibaldi et le rapporteur pour les remarques ayant permis d'améliorer cet article, ainsi que R. Parimala qui a suggéré le corollaire 6.7. Le second auteur remercie L. Breen et B. Oliver pour les échanges enrichissants qu'elle a eu avec eux.

Bibliographie

[Berhuy et al. 2007] G. Berhuy, C. Frings et J.-P. Tignol, "Galois cohomology of the classical groups over imperfect fields", *J. Pure Appl. Algebra* **211**:2 (2007), 307–341. MR 2009f:12004 Zbl 1121.11035

[Bloch et Kato 1986] S. Bloch et K. Kato, "p-adic étale cohomology", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 63 (1986), 107–152. MR 87k:14018 Zbl 0613.14017

[Borel et De Siebenthal 1949] A. Borel et J. De Siebenthal, "Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos", *Comment. Math. Helv.* **23** (1949), 200–221. MR 11,326d Zbl 0034.30701

[Bourbaki 1982] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitre 9: groupes de Lie réels compacts*, Masson, Paris, 1982. MR 84i:22001 Zbl 0505.22006

[Brown 1982] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics **87**, Springer, New York, 1982. MR 83k:20002 Zbl 0584.20036

[Brylinski et Deligne 2001] J.-L. Brylinski et P. Deligne, "Central extensions of reductive groups by $\mathbf{K}_2$", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **94** (2001), 5–85. MR 2004a:20049 Zbl 1093.20027

[Carter 1972] R. W. Carter, "Conjugacy classes in the Weyl group", *Compositio Math.* **25** (1972), 1–59. MR 47 #6884 Zbl 0254.17005

[Chernousov 1994] V. I. Chernousov, "A remark on the (mod 5)-invariant of Serre for groups of type E_8", *Mat. Zametki* **56**:1 (1994), 116–121, 157. MR 95i:20072 Zbl 0835.20059

[Chernousov et Serre 2006] V. Chernousov et J.-P. Serre, "Lower bounds for essential dimensions via orthogonal representations", *J. Algebra* **305**:2 (2006), 1055–1070. MR 2007i:20070 Zbl 1181.20042

[Colliot-Thélène et Raskind 1985] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, "$\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group", *Math. Ann.* **270**:2 (1985), 165–199. MR 86m:14005 Zbl 0536.14004

[Esnault et al. 1998] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine et E. Viehweg, "The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles", *J. Amer. Math. Soc.* **11**:1 (1998), 73–118. MR 98d:14010 Zbl 1025.11009

[Garibaldi 2009] S. Garibaldi, *Cohomological invariants: exceptional groups and spin groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **937**, American Mathematical Society, Providence, 2009. MR 2010g:20079 Zbl 1191.11009

[Garibaldi et Quéguiner-Mathieu 2007] S. Garibaldi et A. Quéguiner-Mathieu, "Restricting the Rost invariant to the center", *Algebra i Analiz* **19**:2 (2007), 52–73. Republié dans *St. Petersburg Math. J.* **19**:2 (2008), 197–213. MR 2008f:12009 Zbl 05342956

[Garibaldi et al. 2003] S. Garibaldi, A. Merkurjev et J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, Univ. Lecture Ser. **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. MR 1999383 Zbl 1159.12311

[Gille 2000] P. Gille, "Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive", *K-Theory* **21**:1 (2000), 57–100. MR 2001k:11064 Zbl 0993.20031

[Gille 2010] P. Gille, "The Borel-de Siebenthal's theorem", 2010, http://www.math.ens.fr/~gille/prenotes/bds.pdf.

[Gille et Reichstein 2009] P. Gille et Z. Reichstein, "A lower bound on the essential dimension of a connected linear group", *Comment. Math. Helv.* **84**:1 (2009), 189–212. MR 2009j:11066 Zbl 1173.11022

[Gille et Szamuely 2006] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. MR 2007k:16033 Zbl 1137.12001

[Griess 1991] R. L. Griess, Jr., "Elementary abelian p-subgroups of algebraic groups", *Geom. Dedicata* **39**:3 (1991), 253–305. MR 92i:20047 Zbl 0733.20023

[Illusie 1979] L. Illusie, "Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **12**:4 (1979), 501–661. MR 82d:14013

[Kahn 1993] B. Kahn, "Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres", *K-Theory* **7**:1 (1993), 55–100. MR 94i:11094 Zbl 0780.12007

[Kato 1982] K. Kato, "Galois cohomology of complete discrete valuation fields", pp. 215–238 dans *Algebraic K-theory* (Oberwolfach, 1980), vol. 2, édité par R. K. Dennis, Lecture Notes in Math. **967**, Springer, Berlin, 1982. MR 84k:12006 Zbl 0506.12022

[Knus et al. 1998] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost et J.-P. Tignol, *The book of involutions*, Colloquium Publications **44**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR 2000a:16031 Zbl 0955.16001

[Mac Lane 1963] S. Mac Lane, *Homology*, Grundlehren der math. Wiss. **114**, Springer, Berlin, 1963.

[Matsumoto 1969] H. Matsumoto, "Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **2** (1969), 1–62. MR 39 #1566 Zbl 0261.20025

[Merkurjev et Suslin 1982] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, "$\mathcal{K}$-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de norme résiduelle", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46**:5 (1982), 1011–1046. En russe; traduction anglaise: *Math. USSR Izv.* **21** (1983), 307–340. MR 84i:12007

[Merkurjev et al. 2002] A. S. Merkurjev, R. Parimala et J.-P. Tignol, "Invariants of quasitrivial tori and the Rost invariant", *Algebra i Analiz* **14**:5 (2002), 110–151. Republié dans *St. Petersburg Math. J.* **14**:5 (2003), 791–821. MR 2004c:11045 Zbl 1041.11023

[Petersson et Racine 1996] H. P. Petersson et M. L. Racine, "An elementary approach to the Serre–Rost invariant of Albert algebras", *Indag. Math. (N.S.)* **7**:3 (1996), 343–365. MR 99j:17045 Zbl 0872.17029

[Reichstein et Youssin 2000] Z. Reichstein et B. Youssin, "Essential dimensions of algebraic groups and a resolution theorem for G-varieties", *Canad. J. Math.* **52**:5 (2000), 1018–1056. MR2001k:2001k:14088 Zbl 1044.14023

[Rost 1991] M. Rost, "A (mod 3) invariant for exceptional Jordan algebras", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **313**:12 (1991), 823–827. MR 92j:19002 Zbl 0756.17014

[Serre 1994] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 5ème éd., Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer, Berlin, 1994. MR 96b:12010 Zbl 0812.12002

[Serre 2010] J.-P. Serre, "Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis", pp. 75–100 = exposé 1000 dans *Séminaire Bourbaki* 2008/2009, Astérisque **332**, Soc. Math. de France, Paris, 2010. MR 2648675

[Springer 1974] T. A. Springer, "Regular elements of finite reflection groups", *Invent. Math.* **25** (1974), 159–198. MR 50 #7371 Zbl 0287.20043

[Springer et Steinberg 1970] T. A. Springer et R. Steinberg, "Conjugacy classes", pp. 167–266 dans *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups* (Princeton, 1968/69), édité par A. Borel et al., Lecture Notes in Mathematics **131**, Springer, Berlin, 1970. MR 42 #3091

[Tits 1971] J. Tits, "Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque", *J. Reine Angew. Math.* **247** (1971), 196–220. MR 43 #3269 Zbl 0227.20015

[Tits 1990] J. Tits, "Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups", *J. Algebra* **131**:2 (1990), 648–677. MR 91g:20069 Zbl 0697.20029

[Weibel 1994] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Adv. Math. **38**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR 95f:18001 Zbl 0797.18001

Communicated by Michel van den Bergh
Received 2009-07-22 Revised 2010-05-10 Accepted 2010-05-29

Philippe.Gille@ens.fr — *UMR 8552 du CNRS, Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, F-75005 Paris, France*
http://www.math.ens.fr/~gille/

queguin@math.univ-paris13.fr — *Université Paris 13, LAGA, UMR CNRS 7539, et Université Paris 12, Institut Galilée, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France*
http://www-math.univ-paris13.fr/~queguin/

Algebra & Number Theory

www.jant.org

EDITORS

MANAGING EDITOR

Bjorn Poonen
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, USA

EDITORIAL BOARD CHAIR

David Eisenbud
University of California
Berkeley, USA

BOARD OF EDITORS

Georgia Benkart	University of Wisconsin, Madison, USA
Dave Benson	University of Aberdeen, Scotland
Richard E. Borcherds	University of California, Berkeley, USA
John H. Coates	University of Cambridge, UK
J-L. Colliot-Thélène	CNRS, Université Paris-Sud, France
Brian D. Conrad	University of Michigan, USA
Hélène Esnault	Universität Duisburg-Essen, Germany
Hubert Flenner	Ruhr-Universität, Germany
Edward Frenkel	University of California, Berkeley, USA
Andrew Granville	Université de Montréal, Canada
Joseph Gubeladze	San Francisco State University, USA
Ehud Hrushovski	Hebrew University, Israel
Craig Huneke	University of Kansas, USA
Mikhail Kapranov	Yale University, USA
Yujiro Kawamata	University of Tokyo, Japan
János Kollár	Princeton University, USA
Yuri Manin	Northwestern University, USA
Barry Mazur	Harvard University, USA
Susan Montgomery	University of Southern California, USA
Shigefumi Mori	RIMS, Kyoto University, Japan
Andrei Okounkov	Princeton University, USA
Raman Parimala	Emory University, USA
Victor Reiner	University of Minnesota, USA
Karl Rubin	University of California, Irvine, USA
Peter Sarnak	Princeton University, USA
Michael Singer	North Carolina State University, USA
Ronald Solomon	Ohio State University, USA
Vasudevan Srinivas	Tata Inst. of Fund. Research, India
J. Toby Stafford	University of Michigan, USA
Bernd Sturmfels	University of California, Berkeley, USA
Richard Taylor	Harvard University, USA
Ravi Vakil	Stanford University, USA
Michel van den Bergh	Hasselt University, Belgium
Marie-France Vignéras	Université Paris VII, France
Kei-Ichi Watanabe	Nihon University, Japan
Andrei Zelevinsky	Northeastern University, USA
Efim Zelmanov	University of California, San Diego, USA

PRODUCTION

contact@msp.org

Silvio Levy, Scientific Editor

Andrew Levy, Production Editor

See inside back cover or www.jant.org for submission instructions.

The subscription price for 2011 is US $150/year for the electronic version, and $210/year (+$35 shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues from the last three years and changes of subscribers address should be sent to Mathematical Sciences Publishers, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720-3840, USA.

Algebra & Number Theory (ISSN 1937-0652) at Mathematical Sciences Publishers, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

ANT peer review and production are managed by EditFlow™ from Mathematical Sciences Publishers.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

http://msp.org/

A NON-PROFIT CORPORATION

Typeset in LaTeX

Copyright ©2011 by Mathematical Sciences Publishers

Algebra & Number Theory

Volume 5 No. 1 2011