

# *Algebra & Number Theory*

Volume 12

2018

No. 4

$(\varphi, \Gamma)$ -modules de de Rham  
et fonctions  $L$   $p$ -adiques

Joaquín Rodríguez Jacinto



# $(\varphi, \Gamma)$ -modules de de Rham et fonctions $L$ $p$ -adiques

Joaquín Rodrigues Jacinto

On développe une variante des méthodes de Coleman et Perrin-Riou permettant, pour une représentation galoisienne de de Rham, construire des fonctions  $L$   $p$ -adiques à partir d'un système compatible d'éléments globaux. On obtient de la sorte des fonctions analytiques sur un ouvert de l'espace des poids contenant les caractères localement algébriques de conducteur assez grand. Appliqué au système d'Euler de Kato, cela fournit des fonctions  $L$   $p$ -adiques pour les courbes elliptiques à mauvaise réduction additive et, plus généralement, pour les formes modulaires supercuspidales en  $p$ . En dimension 2, nous prouvons une équation fonctionnelle pour nos fonctions  $L$   $p$ -adiques.

We develop a variant of Coleman and Perrin-Riou's methods giving, for a de Rham  $p$ -adic Galois representation, a construction of  $p$ -adic  $L$ -functions from a compatible system of global elements. As a result, we construct analytic functions on an open set of the  $p$ -adic weight space containing all locally algebraic characters of large enough conductor. Applied to Kato's Euler system, this gives  $p$ -adic  $L$ -functions for elliptic curves with additive bad reduction and, more generally, for modular forms which are supercuspidal at  $p$ . In the case of dimension 2, we prove a functional equation for our  $p$ -adic  $L$ -functions.

Introduction	886
0A. Le système d'Euler de Kato	887
0B. Le cas supercuspidal	889
0C. Démonstration	890
0D. Plan de l'article	894
0E. Notations	894
I. La fonction $L$ locale d'un $(\varphi, \Gamma)$ -module de de Rham	897
IA. Résultat principal	897
IB. Généralités sur les $(\varphi, \Gamma)$ -modules	898
IC. La fonction $L$ locale	911
ID. Équation fonctionnelle en dimension 2	920
II. Fonction $L$ $p$ -adique d'une forme modulaire	924
IIA. Notations et compléments	925
IIB. Plongements $p$ -adiques des valeurs spéciales	927
IIC. Interpolation	927
IID. Équation fonctionnelle et valeurs aux entiers positifs	929
Remerciements	932
Bibliographie	932

MSC2010: primary 11S40; secondary 11R23, 11S37.

Mots-clefs:  $p$ -adic  $L$ -functions, modular forms,  $(\varphi, \Gamma)$ -modules,  $p$ -adic Hodge theory.

## Introduction

Cette article est consacré à l'étude des fonctions  $L$   $p$ -adiques associées aux formes modulaires. En utilisant la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et en généralisant certains résultats de Perrin-Riou, on montre comment construire des fonctions  $L$   $p$ -adiques associées à une représentation  $p$ -adique du groupe de Galois absolu  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  de  $\mathbb{Q}_p$  (possiblement à mauvaise réduction en  $p$ ) munie d'un système compatible de classes de cohomologie. En particulier, ceci fournit des fonctions  $L$   $p$ -adiques pour une forme modulaire supercuspidale en  $p$  tordue par des caractères suffisamment ramifiés.

Soit

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f) \otimes \mathbb{C}$$

une forme primitive (i.e., cuspidale, nouvelle, propre pour les opérateurs de Hecke et normalisée) de poids  $k \geq 2$ , niveau  $N$  et caractère  $\omega_f : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Pour  $\eta$  un caractère de Dirichlet, notons

$$L(f, \eta, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \eta(n) n^{-s}$$

la fonction  $L$  complexe associée à  $f$  et  $\eta$ . La série définissant  $L(f, \eta, s)$  converge pour  $\operatorname{Re} s > 1$ , admet un prolongement analytique à tout le plan complexe et elle satisfait une équation fonctionnelle reliant les valeurs  $L(f, \eta, s)$  et  $L(\check{f}, \eta^{-1}, k - s)$ , où  $\check{f} = \sum_{n \geq 1} \bar{a}_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f^{-1})$  est la forme conjuguée à  $f$ . La théorie des symboles modulaires permet de montrer l'existence des périodes complexes  $\Omega_f^+$  et  $\Omega_f^-$  telles que, si  $\eta$  est un caractère de Dirichlet,  $j$  est un entier tel que  $1 \leq j \leq k - 1$  et  $\pm$  est tel que  $\eta(-1)(-1)^j = \pm 1$ , alors

$$\frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j} \frac{L(f, \eta, j)}{\Omega_f^\pm} \in \bar{\mathbb{Q}}.$$

Ceci permet, en fixant une immersion  $\bar{\mathbb{Q}} \subseteq \bar{\mathbb{Q}}_p$  et en notant  $\Lambda_\infty(f, \eta, s) = (\Gamma(s)/(2i\pi)^s)L(f, \eta, s)$ , de voir ces valeurs dans le monde  $p$ -adique en posant

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta, j)) = \frac{\Lambda_\infty(f, \eta, j)}{\Omega_f^\pm} \in \bar{\mathbb{Q}}_p.$$

Les fonctions  $L$   $p$ -adiques peuvent être vues naturellement comme des fonctions rigides analytiques sur l'espace des poids  $p$ -adiques  $\mathfrak{X}$ .<sup>1</sup> Si  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$  est un caractère d'ordre fini, une telle fonction  $L_p \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$  est déterminée par ses valeurs sur les caractères de la forme  $x \mapsto \eta(x)x^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En particulier, si l'on pose, pour  $s \in \mathbb{Z}_p$  et  $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ ,  $\langle x \rangle^s = \exp(s \log x)$ , une fonction analytique sur l'espace des poids donne naissance à une famille de fonctions  $L_p(\eta, s)$  d'une variable  $p$ -adique  $s \in \mathbb{Z}_p$ , pour  $\eta$  parcourant les caractères d'ordre fini.

1. L'espace  $\mathfrak{X}$  est un espace analytique rigide dont les  $L$ -points, pour  $L$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , sont donnés par  $\mathfrak{X}(L) = \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_p^\times, L)$ . Il est une union de boules ouvertes et donc quasi-Stein. Par un théorème d'Amice, les distributions sur  $\mathbb{Z}_p^\times$  correspondent aux fonctions (rigides) analytiques sur  $\mathfrak{X}$ .

Fixons un isomorphisme  $\overline{\mathbb{Q}}_p \cong \mathbb{C}$  et notons

$$X^2 - a_p X + \omega_f(p) p^{k-1}$$

le polynôme de Hecke en  $p$  de la forme  $f$  et  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}_p$  ses racines. On dit que  $f$  est de pente finie si au moins une de ces racines est non nulle. Remarquons simplement que, si  $p \nmid N$ , alors  $f$  est de pente finie, et que, si  $p$  divise  $N$ , alors  $f$  est de pente finie si et seulement si  $a_p \neq 0$ . Une des premières constructions de la fonction  $L$   $p$ -adique de  $f$  dépend du choix d'une racine non nulle, disons  $\alpha$ , du polynôme de Hecke en  $p$  de la forme  $f$ .

**Théorème 0.1** [Manin 1973; Amice et Vélou 1975; Višik 1976; Mazur et al. 1986; Pollack et Stevens 2013; Bellaïche 2012; Delbourgo 2002]. *Soient  $f$  de pente finie et  $\alpha$  comme ci-dessus. Il existe une (unique si  $v_p(\alpha) < k - 1$ ) fonction  $L_{p,\alpha}(f) \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$ , d'ordre  $v_p(\alpha)$ , telle que, si  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$  est un caractère de Dirichlet de conducteur  $p^n$  et  $j$  un entier tel que  $0 \leq j \leq k - 2$ , on a*

$$L_{p,\alpha}(f)(\eta \chi^j) = e_{p,\alpha}(f, \eta, j) \frac{p^{n(j+1)}}{G(\eta^{-1})} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j + 1)),$$

où  $G(\eta^{-1}) = \sum_{a=0}^{p^n-1} \eta^{-1}(a) \exp(2i\pi a/p^n) \in \overline{\mathbb{Q}}_p$  dénote la somme de Gauss du caractère  $\eta^{-1}$  et le facteur  $e_{p,\alpha}(f, \eta, j)$  est défini par la formule

$$e_{p,\alpha}(f, \eta, j) = \begin{cases} \alpha^{-n} & \text{si } n > 0, \\ (1 - \alpha^{-1} \omega_f(p) p^{k-2-j})(1 - \alpha^{-1} p^j) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

La construction peut être adaptée [Delbourgo 2002] à la situation où  $f$  est de pente infinie mais  $f \otimes \xi$  est de pente finie pour un certain caractère  $\xi$ . Si  $f \otimes \xi$  n'est pas de pente finie pour aucun caractère  $\xi$ , on dit que la forme  $f$  est *supercuspdale*. Cette condition correspond [Loeffler et Weinstein 2012, Proposition 2.8] à ce que la représentation lisse de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  associée à  $f$  soit supercuspdale.

**0A. Le système d'Euler de Kato.** Il existe une construction alternative [Kato 2004; Colmez 2004] de la fonction  $L$   $p$ -adique, qui est moins élémentaire mais a pourtant l'avantage de permettre de relier les valeurs en certains points entiers de la fonction  $L$   $p$ -adique à des quantités de nature cohomologique, ce qui permet, par exemple, de démontrer des instances de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer  $p$ -adique et la conjecture principale d'Iwasawa pour les représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires. Nous rappelons dans ce qui suit la construction de Kato de la fonction  $L$   $p$ -adique dans le cas où  $p$  est un nombre premier ne divisant pas le niveau  $N$  de  $f$ .<sup>2</sup>

Soit  $L$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  contenant les coefficients de Fourier de la forme  $f$  et notons  $\mathcal{O}_L$  l'anneau des entiers de  $L$ . Soit  $V(f)$  la  $L$ -représentation du groupe de Galois absolu  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  associée à  $f$  par Shimura–Deligne : elle est de dimension 2, non ramifiée en dehors  $Np$ , de Rham en  $p$  et caractérisée par le fait que, pour tout  $\ell \nmid Np$ , alors

$$\det(1 - \mathrm{Frob}_\ell^{-1} X | V(f)^{I_\ell}) = 1 - a_\ell X + \ell^{k-1} \omega_f(\ell) X^2,$$

2. Voir [Colmez 2004] pour les modifications nécessaires dans le cas semi-stable et [Delbourgo 2002] pour le cas où la représentation dévient cristalline sur une extension abélienne de  $\mathbb{Q}_p$ .

où  $\text{Frob}_\ell$  désigne le Frobenius arithmétique en  $\ell$  et  $I_\ell \subseteq \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_\ell} \subseteq \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$  dénote le groupe d’inertie du groupe de Galois absolu  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_\ell} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$  de  $\mathbb{Q}_\ell$  vu dedans  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$  comme un groupe de décomposition. Notons aussi par  $V(f)$  la restriction de  $V(f)$  au groupe  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ , qui est une représentation de dimension 2, de Rham (cristalline si  $p \nmid N$ ) à poids de Hodge–Tate 0 et  $1 - k$ .

Soient  $F_\infty = \bigcup_n \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$  l’extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}_p$ ,

$$\Gamma_n = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})) \subseteq \Gamma = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_p)$$

et  $\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$  le caractère cyclotomique. La construction de Kato repose sur la construction d’un système d’Euler<sup>3</sup>  $z_{\text{Kato}}$  attaché à  $f$  dans la représentation  $V = V(f)^*(1) = V(\check{f})(k)$  (qui est de Rham à poids de Hodge–Tate 1 et  $k$  en  $p$ ) et dont les niveaux en les différentes puissances de  $p$  fournissent un élément, aussi noté  $z_{\text{Kato}}$ , de la cohomologie d’Iwasawa de la représentation  $V$  définie par

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) = \varprojlim_n H^1(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n}), T) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \Lambda \otimes V),$$

où  $T$  dénote n’importe quel  $\mathcal{O}_L$ -réseau de  $V$  stable par  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ ,  $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$  dénote l’algèbre d’Iwasawa de  $\Gamma$  et où la limite projective est prise par rapport aux applications de corestriction (le dernier isomorphisme étant une conséquence du lemme de Shapiro).

Un théorème fondamental de Kato [2004, Theorem 12.5] montre que l’élément  $z_{\text{Kato}}$  est intimement lié aux valeurs spéciales de la fonction  $L$  complexe de la forme  $f$ . Si  $p \nmid N$  (i.e., si  $V(f)$  est cristalline), ce théorème permet à Kato [2004] d’appliquer la machine à fonctions  $L$   $p$ -adiques de Perrin-Riou [1994; 1995]

$$\text{Log}_V : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathcal{D}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{X}) \otimes \mathbf{D}_{\text{cris}}(V),$$

où  $\mathcal{D}(\Gamma)$  dénote l’algèbre de distributions sur  $\Gamma$ ,<sup>4</sup> interpolant  $p$ -adiquement les applications exponentielles et (d’après un théorème de Colmez, Benois et Kato–Kurihara–Tsuji) exponentielles duales de Bloch–Kato pour des différentes tordues de la représentation en question, pour obtenir une nouvelle construction de la fonction  $L$   $p$ -adique de  $f$ .

**Théorème 0.2** [Kato 2004, Theorem 16.6]. *Soit  $e_\alpha \in \mathbf{D}_{\text{cris}}(V(f)) = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$  un vecteur propre du Frobenius cristallin de valeur propre  $\alpha$ . On a alors*

$$L_{p,\alpha}(f) = \langle \text{Log}_V(z_{\text{Kato}}), e_\alpha \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \times \mathbf{D}_{\text{cris}}(V^*(1)) \rightarrow L$  dénote l’accouplement de Poincaré.

Remarquons que l’on dispose dans tous les cas d’un système d’Euler  $z_{\text{Kato}}$  et que l’application de Perrin-Riou a été généralisée pour les représentations de de Rham par des travaux de Colmez [1998] et Cherbonnier et Colmez [1999] et, pour un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur l’anneau de Robba  $\mathcal{R}$ , par Nakamura [2014].

3. Les éléments zêta de Kato dépendent d’un certain nombre de choix que l’on ignore dans cette introduction afin de simplifier l’exposition.

4. D’après un théorème d’Amice,  $\mathcal{D}(\Gamma)$  et  $\mathcal{O}(\mathfrak{X})$  sont isomorphes, or on garde la notation  $\mathcal{D}(\Gamma)$ , qui est plus souvent utilisée.

Or ces applications ne s'expriment pas naturellement en termes de fonctions analytiques sur l'espace des poids et ne fournissent malheureusement (ou heureusement) pas si simplement des fonctions  $L$   $p$ -adiques.

**0B. Le cas supercuspidal.** Décrivons brièvement le résultat principal de cet article. L'isomorphisme  $\overline{\mathbb{Q}}_p \cong \mathbb{C}$  que l'on a fixé permet de voir  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  comme un caractère de Dirichlet de conducteur  $p^n$ ,  $n \geq 0$ , et on note  $f \otimes \eta^{-1}$  la forme tordue de  $f$  par  $\eta^{-1}$ , qui est aussi une forme primitive (de niveau  $Np^{2n}$  et caractère  $\omega_f \eta^{-2}$ , au moins si  $n$  est assez grand). Rappelons que l'on a posé

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, s) = \frac{\Gamma(s)}{(2i\pi)^s} \cdot L(f, \eta^{-1}, s)$$

et que la forme  $f$  donne lieu à une représentation automorphe  $\pi(f) = \prod'_v \pi_v(f)$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ , où  $v$  parcourt l'ensemble des places de  $\mathbb{Q}$  et  $\pi_v(f)$  est une représentation lisse de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_v)$ . Pour  $\eta$  un caractère de Dirichlet, vu comme un caractère des adèles, et  $v$  une place de  $\mathbb{Q}$ , on note  $\varepsilon(\pi_v(f) \otimes \eta)$  les facteurs epsilon des composantes locales de la représentation  $\pi(f) \otimes \eta$ ,<sup>5</sup> de sorte que le facteur epsilon global associé à  $f$  et  $\eta$  est donné par la formule

$$\varepsilon(\pi(f) \otimes \eta) = \varepsilon(\pi_\infty(f)) \cdot \prod_{\ell|N} \varepsilon(\pi_\ell(f) \otimes \eta).$$

La fonction  $\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, s)$  satisfait alors l'équation fonctionnelle

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j) = i^k (-1)^j \varepsilon(\pi(f) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{j-(k-1)/2}) \cdot \Lambda_\infty(f, \eta, k-j), \quad j \in \mathbb{Z}$$

On obtient le théorème suivant :

**Théorème 0.3 (définition 3 + théorème I.1 + lemme II.6 + théorème II.10).** Soit  $f \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f)$  une forme primitive et soit  $V = V(\check{f})(k-1)$ . Il existe des plongements naturels

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j) \mapsto \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j)) \in \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V), \quad j \leq k-1,$$

un ouvert  $\mathfrak{U}_f \subseteq \mathfrak{X}$  ne dépendant que de la puissance de  $p$  divisant le niveau  $N$  de la forme  $f$  et contenant tous les caractères d'ordre  $p^n$  pour  $n$  assez grand, et une unique fonction rigide analytique  $\Lambda_p(f) \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_f) \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$  telle que, si  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère de conducteur  $p^n$  et  $j < k-1$  sont tels que  $\eta x^j \in \mathfrak{U}_f$ , alors

$$\Lambda_p(f)(\eta x^j) = \frac{p^{n(j+1)}}{G(\eta^{-1})} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j+1)).$$

De plus, la fonction  $\Lambda_p(f)$  satisfait une équation fonctionnelle de la forme<sup>6</sup>

$$\Lambda_p(f)(\eta x^j) = C(f, \eta, j) \cdot \Lambda_p(\check{f})(\eta^{-1} x^{k-2-j}),$$

5. On a  $\varepsilon(\pi_\infty(f)) = i^k$ .

6. La formulation de l'équation fonctionnelle est légèrement imprécise, cf. le [théorème II.10](#).

où

$$C(f, \eta, j) = p^n \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-j+(k-1)/2})^2 \varepsilon(\pi_p(\check{f}) \otimes \eta \otimes |\cdot|^{-j+k-1})^{-1} \cdot \prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_\ell(\check{f}) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{-j+(k-1)/2})^{-1},$$

où  $N'$  dénote la partie de  $N$  première à  $p$  et  $\varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^s) = p^{-ns} \eta(p)^n G(\eta^{-1})$ .

Finalemnt, si  $p \nmid N$  alors  $\mathfrak{L}_f = \mathfrak{X}$  et, si  $\alpha$  est une valeur propre du polynôme de Hecke en  $p$  de  $f$  et  $e_\alpha \in \mathbf{D}_{\text{cris}}(V(f)) = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)^*$  est un vecteur propre du Frobenius cristallin de valeur propre  $\alpha$ , on a

$$L_{p,\alpha}(f) = \langle \Lambda_p(f), e_\alpha \rangle.$$

**Remarque 0.4.** Les méthodes du théorème fournissent, plus généralement, pour toute représentation  $V \in \text{Rep}_L \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  de Rham de dimension  $d$  et tout  $z \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V)$ , un ouvert  $\mathfrak{U}_V \subseteq \mathfrak{X}$ , ne dépendant que de la valuation  $p$ -adique du discriminant de la plus petite extension finie galoisienne  $K/\mathbb{Q}_p$  sur laquelle  $V$  dévient semi-stable, et une unique fonction  $\Lambda_{V,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_V)$  interpolant des exponentielles et exponentielles duales de différentes spécialisations de l'élément  $z$ . Dans le cas général, on n'a pas, hélas ! une interprétation si satisfaisante des valeurs interpolées.

**0C. Démonstration.** Disons quelques mots sur la démonstration du théorème.

**0C1. Plongements  $p$ -adiques des valeurs spéciales.** Soit  $M = M(f \otimes \eta^{-1})$  le motif associé à la forme  $f \otimes \eta^{-1}$  et considérons, pour  $j \geq 0$ ,

$$M^*(1 + j) = M(\check{f} \otimes \eta)(k + j),$$

dont  $V(\eta\chi^{j+1})$  est la réalisation  $p$ -adique. En utilisant les symboles d'Eisenstein définis par Beilinson [1986], on peut construire des éléments (cf. [Gealy 2006, §3.2])  $\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j) \in H^1(M^*(1 + j))$  et un résultat de Gealy [2006, Theorem 4.1.1] montre qu'ils satisfont une variante de la conjecture de Bloch–Kato.

Par ailleurs, grâce aux travaux de Gros [1990], Nizioł [1997], Besser [2000], et Nekovář et Nizioł [2016], on dispose aussi des régulateurs  $p$ -adiques

$$r_p : H^1(M^*(1 + j)) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(\eta\chi^{j+1})),$$

qui satisfont la relation de commutativité

$$r_{\text{ét}} = \exp \circ r_p,$$

où  $\exp$  est l'exponentielle de Bloch–Kato.

Le résultat de Gealy mentionné ci-dessus suggère de considérer les régulateurs  $p$ -adiques des éléments  $\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j)$  comme les valeurs  $p$ -adiques naturels à interpoler. Notons que les éléments

$$r_p(\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j)) \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(\eta\chi^{j+1}))$$

vivent dans des modules différents. Nous allons expliquer comment les voir tous naturellement comme des éléments dans  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ .

Si  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère d'ordre fini,  $G(\eta)$  dénote sa somme de Gauss et  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ , alors  $\sigma_a(G(\eta)) = \eta(a)^{-1}G(\eta)$  et, si  $e_\eta$  dénote une base du module  $L(\eta)$ ,<sup>7</sup> le groupe  $\Gamma$  (et donc aussi  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ ) agit trivialement sur l'élément  $e_\eta^{\text{dR}} = G(\eta) \cdot e_\eta \in \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes L(\eta)$  et est donc une base du  $L$ -espace vectoriel  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(L(\eta))$ . Si  $j \in \mathbb{Z}$ , il en est de même de  $e_j^{\text{dR}} = t^{-j}e_j \in \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes L(\chi^j)$ . Notons

$$e_{\eta,j}^{\text{dR}} = e_\eta^{\text{dR}} \otimes e_j^{\text{dR}} = G(\eta)e_\eta \otimes t^{-j}, e_j$$

qui est une base du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(L(\eta\chi^j))$  et, pour  $e_\eta^\vee = e_{\eta^{-1}}$  et  $e_{-j}$  les éléments duaux de  $e_\eta$  et  $e_j$ , on note

$$e_{\eta,j}^{\text{dR},\vee} = G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee \otimes t^j e_{-j},$$

qui est une base du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(L(\eta\chi^j)^*)$ .

Si  $V \in \text{Rep}_L \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  est de Rham, alors  $V(\eta\chi^j)$  l'est aussi et on a, par ce qui précède,

$$\mathbf{D}_{\text{dR}}(V(\eta\chi^j)) = (\mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes V \otimes L(\eta\chi^j))^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} = (\mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes V)^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}} \otimes e_{\eta,j}^{\text{dR}} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \otimes e_{\eta,j}^{\text{dR}},$$

de sorte que l'application  $x \mapsto x \otimes e_{\eta,j}^{\text{dR},\vee}$  induit un isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\text{dR}}(V(\eta\chi^j)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V).$$

Notons

$$\Gamma^*(j+1) = \begin{cases} j! & \text{si } j \geq 0, \\ \frac{(-1)^{j-1}}{(-j-1)!} & \text{si } j < 0 \end{cases}$$

le coefficient principal de la série de Laurent de la fonction  $\Gamma(s)$  en  $s = j + 1$ . On pose, pour  $j \geq 0$ ,

$$t_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)) = \Gamma^*(j) G(\eta) \cdot r_p(\mathcal{L}(\check{f} \otimes \eta, j)) \otimes e_{\eta,j+1}^{\text{dR},\vee} \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(V).$$

Remarquons que, dans la formule définissant  $t_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j))$ , on “multiplie” et “divise” par  $G(\eta)$ , de sorte que son introduction n'a moralement aucun effet. La valeur  $\Gamma^*(j)$  correspond donc à  $\Gamma(j)$  et la puissance  $t^{j+1}$  correspond à la puissance de  $2i\pi$  dans la définition de  $\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)$ .

**0C2. Interpolation : un premier exemple.** La construction de la fonction  $L$  locale repose sur la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, et est inspirée de la ressemblance entre celle-ci et l'analyse fonctionnelle  $p$ -adique, via le dictionnaire d'analyse fonctionnelle  $p$ -adique de Colmez, qui est aussi à la base même de la construction de la correspondance de Langlands  $p$ -adique pour  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ .

Soit  $\text{LA}(\mathbb{Z}_p, L)$  l'espace des fonctions localement analytiques sur  $\mathbb{Z}_p$  à valeurs dans  $L$  et  $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_p, L)$ , son  $L$ -dual topologique, l'espace des distributions sur  $\mathbb{Z}_p$ . Si  $\phi \in \text{LA}(\mathbb{Z}_p, L)$  et  $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}_p, L)$ , on note  $\int_{\mathbb{Z}_p} \phi \cdot \mu$  l'évaluation de  $\mu$  en  $\phi$ . On a des actions du groupe  $\Gamma$  et des opérateurs  $\varphi$  et  $\psi$  sur l'espace de distributions définis par les formules

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) \cdot \sigma_a(\mu) = \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(ax) \cdot \mu, \quad \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) \cdot \varphi(\mu) = \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(px) \cdot \mu, \quad \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) \cdot \psi(\mu) = \int_{p\mathbb{Z}_p} \phi(x/p) \cdot \mu,$$

7.  $L(\eta)$  dénote le  $L$ -espace vectoriel de dimension 1 sur lequel  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  agit à travers  $\eta$ .



et une opération de “multiplication par  $x$ ” définie par  $\int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x) \cdot m_x(\mu) = \int_{\mathbb{Z}_p} \phi(x)x \cdot \mu$ . Notons que  $\psi(\mu) = 0$  si et seulement si la distribution  $\mu$  est supportée sur  $\mathbb{Z}_p^\times$  et que, si  $\psi(\mu) = \mu$ , alors  $(1 - \varphi)\mu$  est la restriction à  $\mathbb{Z}_p^\times$  de  $\mu$ .

La transformée d’Amice

$$\mu \mapsto \mathcal{A}_\mu = \int_{\mathbb{Z}_p} (1 + T)^x \cdot \mu$$

induit un isomorphisme  $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_p, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^+$ , où  $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R} \cap L[[T]]$ . L’opérateur différentiel  $\partial = (1 + T) \frac{d}{dT}$  sur  $\mathcal{R}$  correspond à la multiplication par  $x$  sur les distributions au sens que  $\partial \mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_{m_x(\mu)}$  et les actions de  $\varphi$  et de  $\sigma_a \in \Gamma$  correspondent à  $\varphi(T) = (1 + T)^p - 1$  et  $\sigma_a(T) = (1 + T)^a - 1$ . En fixant un système compatible  $(\zeta_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$  de racines primitives de l’unité (c’est-à-dire,  $\zeta_{p^n} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$  est une racine primitive  $p^n$ -ième de 1 et  $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ), on peut définir des applications de “localisation”

$$\varphi^{-n} : \mathcal{E}^{[0, r_n]} \rightarrow L_\infty[[t]], \quad T \mapsto \zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1,$$

où  $\mathcal{E}^{[0, r_n]}$  dénote les éléments de  $\mathcal{R}$  qui convergent sur la couronne  $0 < v_p(z) \leq r_n = 1/(p^{n-1}(p - 1))$  et  $L_\infty[[t]] = \varinjlim L_n[[t]]$ . L’opérateur  $\partial$  stabilise  $\mathcal{E}^{[0, r_n]}$  et on a l’identité  $\varphi^{-n} \circ \partial = p^n \frac{d}{dt} \circ \varphi^{-n}$ . Si  $x = \sum_{l \in \mathbb{N}} a_l t^l \in L_\infty[[t]]$ , on note  $[x]_0 = a_0$ . Le lemme suivant nous permet de réécrire l’intégration  $p$ -adique en termes des applications de localisation.

**Lemme 0.5.** *Pour tout  $f \in \mathcal{R}^{\psi=0}$ , il existe une unique fonction analytique  $\kappa \mapsto \kappa(\partial) f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{R}^{\psi=0}$  interpolant les valeurs  $\partial^j f$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , aux caractères  $x^j$ . De plus, si  $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}_p, L)^{\psi=1}$ ,  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère de conducteur  $p^n$ ,  $n > 0$ , et  $\kappa \in \mathfrak{X}$ , alors*<sup>8</sup>

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \eta^{-1} \kappa \cdot \mu = G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) \sigma_a [\varphi^{-n} \kappa(\partial) (1 - \varphi) \mathcal{A}_\mu]_0.$$

L’avantage du lemme ci-dessus est que le terme de droite a un sens, pour tout  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  de de Rham, si l’on remplace  $\mathcal{A}_\mu$  par  $z \in \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)^{\psi=1}$ , où  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$  est l’équation différentielle  $p$ -adique associée à  $D$  par Berger, dès que  $n$  est assez grand, comme on le verra à continuation.

**0C3. Interpolation : le cas général.** Comme suggéré par les résultats de Kato, la construction de  $\Lambda_p(f)$  demande à étendre la construction du logarithme de Perrin-Riou aux  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de de Rham.

Soit  $V \in \text{Rep}_L \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  et notons  $D = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V)$  le  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur l’anneau de Robba  $\mathcal{R}$  qui lui est associé par l’équivalence de catégories de Fontaine [1990], Cherbonnier et Colmez [1998] et Kedlaya [2004]. On a un isomorphisme, dû à Fontaine et Pottharst [Cherbonnier et Colmez 1999; Pottharst 2012],

$$\text{Exp}^* : H^1(\mathbb{Q}_p, \mathcal{D}(\Gamma) \otimes V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\text{rig}}(V)^{\psi=1}.$$

Supposons  $V$  de Rham et notons  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$  l’équation différentielle  $p$ -adique associée à  $D$  par Berger [2002; 2003]. Si  $D$  est à poids de Hodge–Tate positifs, on a  $D \subseteq \Delta$ . On dispose d’un opérateur de connexion  $\partial$  sur  $\Delta$  au-dessus de l’opérateur  $\partial = (1 + T) \frac{d}{dT}$  de “multiplication par  $x$ ” sur  $\mathcal{R}$ .

8. Si  $a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times$ , on note  $\sigma_a \in \Gamma_n$  l’élément lui correspondant par le caractère cyclotomique.

Pour  $n \gg 0$ , il existe des sous- $\mathcal{E}^{[0, r_n]}$ -modules  $\Delta^{[0, r_n]} \subseteq \Delta$  tels que  $\Delta^{[0, r_n]} \otimes_{\mathcal{E}^{[0, r_n]}} \mathcal{R} = \Delta$ . Ces modules sont stables par l'action de  $\Gamma$  et satisfont  $\varphi(\Delta^{[0, r_n]}) \subseteq \Delta^{[0, r_{n+1}]}$ . On a, pour tout  $n \gg 0$ , des applications de localisation

$$\varphi^{-n} : \Delta^{[0, r_n]} \rightarrow L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(V),$$

et on note  $[\cdot]_0 : L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  l'application  $\sum_l a_l t^l \otimes d_l \mapsto a_0 \otimes d_0$ . L'opérateur stabilise  $\Delta^{[0, r_n]}$  et on a  $\varphi^{-n} \circ \partial = p^n \frac{d}{dt} \circ \varphi^{-n}$ .

Si  $z \in D^{\psi=1} \subseteq \Delta^{\psi=1}$ ,  $\eta$  est un caractère de conducteur  $p^n$ ,  $n \gg 0$  et  $j \geq 0$ , on a l'égalité suivante dans  $L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ , qui est l'analogie, en termes de théorie d'Iwasawa, de l'égalité du [lemme 0.5](#) ci-dessus :

$$G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \eta(a) \sigma_a[\varphi^{-n} \partial^j (1 - \varphi)z]_0 = p^{n(j+1)} \Gamma^*(j+1) \cdot \exp^* \left( \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \eta \chi^{-j} \mu_z \right) \otimes e_{\eta, -j}^{\text{dR}, \vee}, \quad (1)$$

où  $\exp^* : H^1(\mathbb{Q}_p, V(\eta \chi^{-j})) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(\eta \chi^{-j})) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \otimes e_{\eta, -j}^{\text{dR}}$  dénote l'exponentielle duale de Bloch-Kato. La proposition suivante permet de prolonger analytiquement le terme de gauche de cette égalité.

**Proposition 0.6 (proposition I.13).** *Pour tout  $z \in \Delta^{\psi=0}$ , il existe une unique fonction rigide analytique  $\kappa \mapsto \kappa(\partial)z$ ,  $\mathfrak{X} \rightarrow \Delta^{\psi=0}$  interpolant les valeurs  $\partial^j z$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , aux caractères  $x^j$ .*

La restriction à  $\mathbb{Z}_p^\times$  (i.e., l'application de l'opérateur  $1 - \varphi$ ) permet d'interpoler  $p$ -adiquement l'opérateur  $\partial$  mais, en revanche, l'application de spécialisation  $\varphi^{-n}$  n'est pas définie sur tout le module  $\Delta^{\psi=0}$ . Une étude du rayon de convergence de l'élément  $\kappa(\partial)$ , pour un caractère  $\kappa \in \mathfrak{X}(L)$ , montre que le terme de gauche de l'équation définit bien une fonction analytique sur une boule ouverte autour  $\eta$  dans l'espace des poids. Le théorème suivant, qui est une généralisation du Logarithme de Perrin-Riou et le résultat principal de cet article, appliqué à  $D = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V(f)(k-1))$ , fournit la construction de la fonction  $\Lambda_p(f)$ . On renvoie au texte pour les notations qui n'ont pas encore été introduites.

**Théorème 0.7 (théorème I.1).** *Soient  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module qui est de Rham à poids de Hodge-Tate positifs et  $z \in D^{\psi=1}$ . Notons  $\mu_z = \text{Exp}^*(z) \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, D)$ . Il existe un ouvert  $\mathfrak{U}_D \subseteq \mathfrak{X}$ , ne dépendant que du module  $\mathbf{D}_{\text{pst}}(D)$ , et une unique fonction analytique  $\Lambda_{D,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  telle que, pour tout  $\eta \chi^j \in \mathfrak{U}_D$ , où  $\eta$  est un caractère de conducteur  $p^n$  et  $j \in \mathbb{Z}$ , on a*

$$\Lambda_{D,z}(\eta \chi^j) = p^{n(j+1)} \Gamma^*(j+1) \cdot \begin{cases} \exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_z \right) \otimes e_{\eta, -j}^{\text{dR}, \vee} & \text{si } j \ll 0, \\ \exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_z \right) \otimes e_{\eta, -j}^{\text{dR}, \vee} & \text{si } j \geq 0. \end{cases}$$

Ce théorème, accouplé à un deuxième résultat de Gealy reliant les éléments motiviques du [proposition II.3](#) et le système d'Euler de Kato (cf. [proposition II.4](#)), permet de démontrer l'existence de l'application  $\Lambda_p(f)$  du [théorème 0.3](#). Le fait que dans le cas cristallin l'on récupère la fonction  $L$   $p$ -adique classique associée à la forme  $f$  suit du fait que notre application est une généralisation du logarithme de Perrin-Riou et de la description de la fonction  $L$   $p$ -adique de  $f$  en termes du système d'Euler de Kato.

**OC4.** *L'équation fonctionnelle en dimension 2 et valeurs aux entiers positifs.* Il est naturel de se demander si ce que la fonction  $\Lambda_p(f)$  interpole aux entiers positifs s'interprète aussi en termes de valeurs spéciales de la fonction  $L$  complexe. Rappelons que, dans la bande critique  $1 \leq j \leq k-1$ , les valeurs  $L(f, \eta, j)$  sont naturellement interprétées  $p$ -adiquement en les divisant par les périodes complexes de la forme  $f$ . Si  $j > k-2$ , une équation fonctionnelle purement locale démontrée dans [\[Rodrigues Jacinto 2018\]](#),

accouplée avec une équation fonctionnelle satisfaite par le système d’Euler de Kato démontrée par Nakamura ([proposition II.8](#)), fournit l’équation fonctionnelle du [théorème 0.3](#).

**0D. Plan de l’article.** L’organisation de l’article ne reflète pas celle de l’introduction. Les premières sections présentent des résultats purement locaux, reportant l’application aux formes modulaire à la fin.

Le premier chapitre contient le premier résultat principal de l’article, à savoir l’extension analytique (partielle) de l’application logarithme de Perrin-Riou pour les représentations de de Rham, fournissant des fonctions rigides analytiques sur des ouverts de l’espace des poids interpolant les applications exponentielle et exponentielle duale de Bloch et Kato. On y trouvera aussi des rappels et généralités sur les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, ainsi qu’une estimation précise du rayon de convergence de  $\Delta$  en termes du module  $\mathbf{D}_{\text{pst}}(D)$ , permettant de décrire l’ouvert  $\mathfrak{U}_D$  du [théorème 0.7](#). Dans le cas étale de dimension 2, en utilisant le résultat principal de [[Rodrigues Jacinto 2018](#)], on obtient une équation fonctionnelle pour notre fonction  $L$  locale.

Finalement, on montre, à l’aide d’un théorème de M. Gealy et des conjectures de Bloch–Kato pour les formes modulaires, comment la construction de la fonction  $L$  locale peut être utilisée pour donner une construction de la fonction  $L$   $p$ -adique d’une forme modulaire, sans aucune hypothèse sur sa pente, et montrer qu’elle interpole des valeurs spéciales de la forme (dûment interprétées  $p$ -adiquement) en tout caractère algébrique de composante finie suffisamment ramifiée.

**0E. Notations.**

- Soient  $p$  un nombre premier,  $\mathbb{Q}_p$  le corps des nombres  $p$ -adiques,  $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$  l’anneau des entiers de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathbb{Z}_p^\times$  le groupe des unités et  $\mathbb{C}_p$  la complétion  $p$ -adique de la clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  de  $\mathbb{Q}_p$ .
- On fixe un système  $(\zeta_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\zeta_{p^n} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ , de racines  $p^n$ -ièmes primitives de l’unité satisfaisant la relation  $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$  dès que  $n \geq 0$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $F_n = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$  le  $n$ -ième niveau de la tour cyclotomique et  $F_\infty = \bigcup_n F_n$ .
- Soit  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$  le groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}_p$ . On définit le caractère cyclotomique  $\chi : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  par la formule  $g(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(g)}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et on note  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}$  le noyau de  $\chi$ , qui s’identifie au groupe de Galois absolu de  $F_\infty$ , et  $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{Q}_p} = \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}/\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}$  qui s’identifie à  $\text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}_p)$ . Le caractère cyclotomique induit un isomorphisme  $\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ . Si  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ , on note  $\sigma_a \in \Gamma$  son inverse par  $\chi$ .
- Soit  $L$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , qui sera notre corps de coefficients, et notons  $L_n = L \otimes F_n = L(\mu_{p^n})$  et  $L_\infty = \bigcup_n L_n$ . On note  $\text{Rep}_L(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p})$  la catégorie des  $L$ -espaces vectoriels de dimension finie munis d’une action  $L$ -linéaire continue du groupe  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ . On omettra souvent  $L$  des notations, cependant il faut être conscient que  $L$  est le corps sous-jacent et qu’il change au fur et à mesure des besoins. Par exemple, si  $\eta$  est un caractère de  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  et si on note  $\mathbb{Q}_p(\eta)$  la représentation de dimension 1 engendrée par un élément  $e_\eta$  sur lequel l’action de  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  est définie par la formule  $g(e_\eta) = \eta(g)e_\eta$ , on sous-entendra que le corps  $L$  de coefficients contient les valeurs prises par  $\eta$ .

**0E1. Anneaux des séries de Laurent.** Commençons par quelques définitions classiques.

- On définit le corps  $\mathcal{E}$  par

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k : a_k \in L, \liminf_{k \rightarrow +\infty} v_p(a_k) > -\infty, \lim_{k \rightarrow -\infty} v_p(a_k) = +\infty \right\},$$

muni de la valuation donnée par  $v_{\mathcal{E}}(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k) = \inf_k v_p(a_k)$ , ce qui fait de  $\mathcal{E}$  un corps valué de dimension 2 dont on note  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  l’anneau des entiers.

— Si  $0 < r < s$ , on définit  $\mathcal{E}^{[r,s]}$  comme l'anneau des fonctions analytiques à valeurs dans  $L$  sur la couronne  $C_{[r,s]} = \{z \in \mathbb{C}_p : r \leq v_p(z) \leq s\}$ . On a

$$\mathcal{E}^{[r,s]} = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k : a_k \in L, \lim_{k \rightarrow -\infty} v_p(a_k) + ks = +\infty, \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} v_p(a_k) + kr = +\infty \right\}.$$

L'anneau  $\mathcal{E}^{[r,s]}$  est principal, de Banach pour la valuation  $v^{[r,s]}$  définie par

$$v^{[r,s]} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k \right) = \inf_{r \leq v_p(z) \leq s} v_p(f(z)) = \min \left\{ \inf_{k \in \mathbb{Z}} (v_p(a_k) + kr), \inf_{k \in \mathbb{Z}} (v_p(a_k) + ks) \right\}.$$

— Pour  $0 < r < s$  on note

$$\mathcal{E}^{]r,s]} = \varinjlim_{t > r} \mathcal{E}^{[t,s]}$$

l'anneau de fonctions analytiques sur la couronne  $C_{]r,s]} = \{z \in \mathbb{C}_p : r < v_p(z) \leq s\}$ , qui est un anneau de Fréchet pour la famille de valuations  $v^{[t,s]}$  pour  $t \in ]r, s]$ .

— Soit  $r_n = 1/(p^{n-1}(p-1)) = v_p(\zeta_{p^n} - 1)$ . On note

$$\mathcal{R} = \varinjlim_{s > 0} \mathcal{E}^{]0,s]}$$

l'anneau de Robba et  $\mathcal{E}^\dagger \subseteq \mathcal{R}$  son sous-anneau d'éléments bornés. C'est l'anneau des séries de Laurent (resp. des séries de Laurent à coefficients bornés) qui convergent sur une couronne  $C_{]0,s]}$  pour  $s$  assez petit (qui dépend de chaque fonction). On remarquera que l'on obtient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{R}$  en complétant  $\mathcal{E}^\dagger$ , respectivement, par la topologie  $p$ -adique et par la topologie de Fréchet définie par la famille de normes  $v^{[r,s]}$ ,  $0 < r < s$ .

Si  $\mathcal{A}$  est un des anneaux définis ci-haut, on note  $\mathcal{A}^+$  son intersection avec  $L[[T]]$ . On a, par exemple,  $\mathcal{E}^+ = \mathcal{O}_L[[T]][[1/p]]$  et  $\mathcal{R}^+$  s'identifie à l'anneau des fonctions analytiques sur la boule ouverte unité. On a une action de  $\Gamma$  sur tous les anneaux définis et une action de l'opérateur  $\varphi$  sur les anneaux  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}^\dagger$  et  $\mathcal{R}$ , définies par les formules

$$\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1, \quad \varphi(T) = (1+T)^p - 1.$$

Tous ces anneaux portent des topologies naturelles pour lesquelles les actions de  $\Gamma$  et  $\varphi$  sont continues. Posons  $\mathcal{A} \in \{\mathcal{E}, \mathcal{R}\}$ . L'anneau  $\mathcal{A}$  est muni d'une action de l'opérateur  $\psi : \mathcal{A}$  est une extension de degré  $p$  de  $\varphi(\mathcal{A})$  avec une base formée par les éléments  $(1+T)^i$ ,  $i = 0, \dots, p-1$ , et on pose

$$\psi \left( \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(f_i) \right) = f_0.$$

Ceci peut être écrit comme

$$\psi = p^{-1} \varphi^{-1} \circ \text{Tr}_{\mathcal{A}/\varphi(\mathcal{A})}.$$

L'opérateur  $\psi$  ainsi construit est un inverse à gauche de  $\varphi$ .

Pour  $\mathcal{A}$  comme ci-dessus, on note  $\Phi\Gamma(\mathcal{A})$  la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{A}$ .

**0E2.** *Caractères de  $\mathbb{Z}_p^\times$ .* Soit  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$  un caractère de conducteur  $p^n$ . On définit, pour  $b \in \mathbb{Z}_p$ ,  $G(\eta, b) = \sum_{a=1}^{p^n-1} \eta(a) \zeta_{p^n}^{ab}$  la somme de Gauss tordue et on note  $G(\eta) = G(\eta, 1)$ . On note  $\eta^{-1}$  le caractère de Dirichlet modulo  $p^n$ , défini par  $\eta^{-1}(n) = \eta(n)^{-1}$  pour  $n \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ . Rappelons deux résultats classiques de la théorie des caractères :

**Proposition 0.8.** *Soit  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$  un caractère de conducteur  $p^n$ . Alors*

- $G(\eta, b) = \eta^{-1}(b)G(\eta, 1)$  pour tout  $b \in \mathbb{Z}_p$ .
- $G(\eta)G(\eta^{-1}) = \eta(-1)p^n$ .

Si  $f \in \text{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \mathbb{C}_p)$  est une fonction localement constante modulo  $p^n$  et à support compact, on peut définir sa transformée de Fourier discrète par la formule

$$\hat{f}(x) = p^{-m} \sum_{y \text{ mod } p^m} f(y)e^{-2\pi ixy},$$

où  $m$  est un entier arbitraire tel que  $m \geq \sup(n, -v_p(x))$ , et  $e^{-2\pi ixy}$  est la racine de l'unité d'ordre une puissance de  $p$  définie par l'application  $\mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$  et par le choix du système  $(\zeta_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$  de racines de l'unité : si  $k \in \mathbb{N}$  est tel que  $a = p^k yx \in \mathbb{Z}_p$ , alors  $e^{-2\pi ixy} = \zeta_{p^k}^{-a}$ . Si  $\eta$  est un caractère de Dirichlet de conducteur  $p^n$ , on a

$$\hat{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{G(\eta^{-1})} \eta^{-1}(p^n x) & \text{si } n > 0, \\ \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p}(x) - p^{-1} \mathbb{1}_{p^{-1}\mathbb{Z}_p}(x) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En particulier, on observe que  $\hat{\eta}$  est à support dans  $p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times$  (resp.  $p^{-1}\mathbb{Z}_p$ ) si  $n > 0$  (resp. si  $n = 0$ ).

**0E3.** *L'espace des poids  $p$ -adiques.* On note  $\mathfrak{X} = \text{Hom}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{G}_m)$  l'espace des poids  $p$ -adiques. Il est un espace rigide analytique, dont les  $L$  points, pour une extension finie  $L$  de  $\mathbb{Q}_p$ , paramètrent les caractères continus de  $\mathbb{Z}_p^\times$  à valeurs dans  $L^\times$ . Posons  $q = p$  si  $p > 2$  et  $q = 4$  si  $p = 2$ . On a  $\mathbb{Z}_p^\times = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \times (1+q\mathbb{Z}_p)$ . L'application logarithme induit un isomorphisme de groupes  $(1+q\mathbb{Z}_p, \times) \xrightarrow{\sim} (q\mathbb{Z}_p, +)$ , d'inverse l'application exponentielle. On a un isomorphisme

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times)^\wedge \times \text{B}(1, 1^-), \quad \eta \mapsto (\eta|_{(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times}, \eta(\exp(q))),$$

où  $\text{B}(1, 1^-)$  est la boule unité ouverte centrée en 1. L'inverse de cet isomorphisme envoie  $(\chi, z) \in ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times)^\wedge \times \text{B}(1, 1^-)$  sur le caractère  $x \mapsto \chi(\bar{x})z^{\log(x)/q} \in \mathfrak{X}$ , où  $\bar{x}$  dénote la réduction modulo  $p$  (resp.  $2p$  si  $p = 2$ ) de  $x$ .

Si  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L \in \mathfrak{X}$ , on note  $z_\eta = \eta(\exp(q)) \in \text{B}(1, 1^-)$  la deuxième coordonnée de l'image de  $\eta$  par l'isomorphisme ci-dessus et on note  $\omega_\eta = \eta'(1) = \log(z_\eta)/q$  son poids.

L'espace  $\mathfrak{X}$  admet un recouvrement croissant admissible  $\mathfrak{X} = \bigcup_n \mathfrak{X}_n$  par des ouverts affinoïdes  $\mathfrak{X}_n = ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times)^\wedge \times \text{B}(1, p^{-1/n})$ , ce qui fait de  $\mathfrak{X}$  un espace quasi Stein. On note  $\mathcal{O}(\mathfrak{X})$  et  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n)$  les anneaux des fonctions analytiques de ces espaces. On a

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X}) = \varprojlim_n \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n).$$

On dispose [Amice et Vélú 1975] d'un isomorphisme, dû à Amice,

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}_p^\times, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_L(\mathfrak{X}),$$

envoyant  $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}_p^\times, L)$  sur la fonction analytique  $F_\mu \in \mathcal{O}_L(\mathfrak{X})$  définie par  $F_\mu(\eta) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \eta(x) \cdot \mu$ . Comme les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions localement analytiques, l'isomorphisme précédent montre qu'une fonction  $F \in \mathcal{O}(\mathfrak{X})$  s'annulant sur les caractères  $x \mapsto x^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est identiquement nulle. On exprime ceci en disant que *les caractères de la forme  $x \mapsto x^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sont Zariski denses dans  $\mathfrak{X}$ .*

On définit

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X}) \widehat{\otimes} \mathcal{R} = \varprojlim_{n>0} \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} \mathcal{E}^{[r,s]},$$

où le produit tensoriel à droite  $c$ 'est le produit tensoriel complété usuel entre deux espaces de Banach. On peut, plus généralement, considérer des distributions à valeurs dans une limite inductive d'espaces de Fréchet quelconque par les mêmes formules. On dira que  $f$  est une fonction analytique sur  $\mathfrak{X}$  à valeurs dans  $\mathcal{R}$  si elle appartient à  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}) \widehat{\otimes} \mathcal{R}$ .

### I. La fonction $L$ locale d'un $(\varphi, \Gamma)$ -module de de Rham

Le présent chapitre contient le premier résultat de cet article, encadré dans l'étude des fonctions  $L$   $p$ -adiques des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de de Rham associées à un système d'Euler, comme démarré par Perrin-Riou [1994]. On construit (théorème I.27), pour un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  de Rham sur  $\mathcal{R}$ , une extension analytique de l'application logarithme de Perrin-Riou fournissant, à partir d'un élément dans la cohomologie d'Iwasawa de  $D$ , une fonction  $L$   $p$ -adique, définie sur un ouvert de l'espace de poids.

**IA. Résultat principal.** On a besoin d'introduire quelques notations pour énoncer le résultat principal de cet article. Si  $\xi, \delta \in \mathfrak{X}$  sont deux caractères, on définit leur distance par  $v_p(\xi - \delta) = v_p(z_\xi - z_\delta)$  si  $\xi|_{(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} = \delta|_{(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times}$  et  $v_p(\xi - \delta) = -\infty$  si non, où  $z_\xi, z_\delta \in B(1, 1^-)$  sont définis dans la section 0E3. Si  $\eta \in \mathfrak{X}$  est un caractère d'ordre fini, on note  $c(\eta)$  la  $p$ -partie de son conducteur (de sorte que  $\text{cond}(\eta) = p^{c(\eta)}$ ) et, pour  $N \geq -\infty$ , on définit

$$\mathfrak{B}(\eta, N) = \{\xi \in \mathfrak{X} : v_p(\xi - \eta) > p^{N-c(\eta)}\} \subseteq \mathfrak{X}.$$

Rappelons que  $\Gamma^*(j)$  dénote le coefficient principal de la série de Laurent de la fonction  $\Gamma(s)$  en  $s = j$ . Notons, pour  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham et  $\mu \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, D)$ ,

$$\log\left(\int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu\right) = \begin{cases} \exp^*\left(\int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu\right) & \text{si } j \geq 0, \\ \exp^{-1}\left(\int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu\right) & \text{si } j \ll 0. \end{cases}$$

Enfin, on note  $r_m(D)$ ,  $m(D) \in \mathbb{N}$ , le rayon de surconvergence de  $D$  (cf. la section IB1 ci-dessous). Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème I.1.** Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham à poids de Hodge–Tate positifs,  $z \in D^{\psi=1}$ , et notons  $\mu_z = \text{Exp}^*(z) \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, D)$ . Il existe un entier  $N(D)$ ,<sup>9</sup> et une unique fonction rigide analytique  $\Lambda_{D,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ , où l'on a posé  $\mathfrak{U}_D = \bigcup_{c(\eta) > m(D)} \mathfrak{B}(\eta, N(D))$ , telle que, pour tout  $\eta \chi^j \in \mathfrak{U}_D$ , où  $\eta$  est

9. L'entier  $N(D)$  ne dépend que du module  $\mathbf{D}_{\text{pst}}(D)$  et est borné en termes du conducteur de la plus petite extension galoisienne  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  tel que l'action de  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $\mathbf{D}_{\text{pst}}(D)$  se factorise à travers  $\mathcal{G}_K$ . Si  $D = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V)$ , où  $V \in \text{Rep}_L \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ , la constante  $N(D)$  est donc bornée en termes du conducteur de la plus petite extension  $K/\mathbb{Q}_p$  sur laquelle  $V$  dévient semi-stable.

un caractère de conducteur  $p^n$ ,  $n > 0$ , et  $j \in \mathbb{Z}$  est tel que  $j \geq 0$  ou  $j \ll 0$ ,<sup>10</sup> on a

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j+1)p^{n(j+1)} \cdot \log\left(\int_{\Gamma} \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z\right) \otimes e_{\eta,-j}^{\mathrm{dR},\vee}.$$

Voici quelques remarques :

- On obtiendra ce théorème (théorème I.27) comme conséquence d’un résultat un peu plus général énoncé dans le théorème I.15.
- Comme les caractères  $\eta\chi^j$  sont Zariski denses dans  $\mathfrak{X}$ , la fonction  $\Lambda_{D,z}$  est unique.
- Si  $D$  est cristallin, alors l’application  $\Lambda_{D,z}$  provient par restriction d’une fonction rigide analytique définie sur tout l’espace des poids  $\mathfrak{X}$ .
- Comme corollaire de ce théorème, on obtiendra une construction partielle de la fonction  $L$   $p$ -adique associée à un système d’Euler d’un  $(\varphi, \Gamma)$ -module de de Rham. Si  $D = D_{\mathrm{rig}}(V)$  est le  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé à la représentation  $p$ -adique d’une forme modulaire, on verra comment ces valeurs s’interprètent en termes de valeurs spéciales de la fonction  $L$  complexe de la forme modulaire.

Voici un bref résumé de ce chapitre. On commence par rappeler les outils et notations nécessaires dont on aura besoin pour la preuve du théorème. On pourra consulter [Nakamura 2014] et [Berger 2003], qui sont les références principales. La structure de la preuve du théorème I.1 est la suivante : Dans la section IB1, on rappelle des généralités sur les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de de Rham sur l’anneau de Robba. Ensuite (section IC2) on définit la multiplication analytique par un caractère sur un  $(\varphi, \Gamma)$ -module. Dans la section IC4, on définit la fonction  $\Lambda_{D,z}$ . Le lemme I.17 calcule le rayon de convergence de  $\Lambda_{D,z}$ , ce qui explique la définition de l’ouvert  $\mathfrak{B}(N)$  du théorème. Les propositions I.22 et I.23 montrent, en utilisant la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou comme démontrée par Nakamura, les propriétés d’interpolation de  $\Lambda_{D,z}$ , introduisant l’opérateur différentiel auxiliaire  $\nabla_h$  dans les formules. Enfin, quand  $D$  est à poids de Hodge–Tate positifs et  $z \in D^{\psi=1} \subseteq \mathbb{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}$  on se débarrasse (section IC8) de l’opérateur différentiel  $\nabla_h$  pour obtenir ainsi l’interpolation voulue.

**IB. Généralités sur les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.** Notons  $\Phi\Gamma(\mathcal{R})$  la catégorie de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}$ .

**IB1. Sous-modules naturels de  $D$ .** Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de rang  $d$ . L’algèbre de Lie de  $\Gamma$  agit sur  $D$  (cf. [Berger 2002, §5.1]) via l’opérateur  $L$ -linéaire

$$\nabla = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\sigma_a - 1}{a - 1} = \frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = \frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^{i+1} \frac{(\gamma - 1)^i}{i},$$

où  $\gamma \in \Gamma$  dénote n’importe quel élément sans torsion de  $\Gamma$ , ce qui définit un opérateur différentiel au-dessus de l’opérateur  $\nabla = t(1 + T) \frac{d}{dT}$  agissant sur  $\mathcal{R}$ .

**Lemme I.2** [Berger 2008, théorème I.3.3]. *Il existe  $\varepsilon > 0$  et, pour tout  $0 < s \leq \varepsilon$ , des uniques sous- $\mathcal{E}^{[0,s]}$ -modules  $D^{[0,s]}$  de  $D$ , satisfaisant*

- $D = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^{[0,s]}} D^{[0,s]}$ .
- $\varphi(D^{[0,s]}) \subseteq D^{[0,s/p]}$ , et on a un isomorphisme  $\mathcal{E}^{[0,s/p]} \otimes_{\mathcal{E}^{[0,s]}} D^{[0,s]} \rightarrow D^{[0,s/p]}$ ,  $f \otimes x \mapsto f\varphi(x)$ , pour tout  $n$  tel que  $r_n \leq \varepsilon$ .

10. Plus précisément,  $j$  doit être suffisamment petit de sorte que  $\exp_{D(-j)} : D_{\mathrm{dR}}(D(-j)) \rightarrow H_{\varphi,\gamma}^1(D(-j))$  soit un isomorphisme. Il suffirait donc de demander  $j < h_0 - 2$ , où  $h_0$  dénote le plus petit poids de Hodge–Tate de  $D$  (cf. [Berger 2002, Theorem 0.9]).

De plus, les modules  $D^{[0,s]}$  sont stables par  $\Gamma$  et  $\nabla$ .

On définit  $m(D)$  comme le plus petit entier tel que le lemme I.2 est vrai avec  $r_m(D) \leq \varepsilon$  et on dit que  $r_m(D)$  est le rayon de surconvergence de  $D$ . Pour  $0 < r < s \leq r_m(D)$ , on pose

$$D^{[r,s]} = \mathcal{E}^{[r,s]} \otimes_{\mathcal{E}^{[0,s]}} D^{[0,s]}.$$

On a alors

$$D = \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} D^{[r,s]},$$

ce qui montre que  $D$  est un espace de type LF (i.e., limite inductive d'espaces de Fréchet).

Rappelons que l'on a des morphismes de localisation

$$\varphi^{-n} : \mathcal{E}^{[0,r_n]} \hookrightarrow L_n \llbracket t \rrbracket$$

envoyant  $T$  sur  $\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1$ . Pour  $n \geq m(D)$  on définit

$$\begin{aligned} D_{\text{dif},n}^+(D) &= L_n \llbracket t \rrbracket \otimes_{\varphi^{-n}, \mathcal{E}^{[0,r_n]}} D^{[0,r_n]}, \\ D_{\text{dif},n}(D) &= L_n((t)) \otimes_{L_n \llbracket t \rrbracket} D_{\text{dif},n}^+(D), \end{aligned}$$

qui sont des  $L_n \llbracket t \rrbracket$  et  $L_n((t))$ -modules, respectivement, libres de rang  $d$  et munis d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$ . Finalement, on définit

$$D_{\text{dif}}(D) = \varinjlim_n D_{\text{dif},n}(D), \quad D_{\text{dif}}^+(D) = \varinjlim_n D_{\text{dif},n}^+(D),$$

qui sont, respectivement, des  $L_\infty((t)) = \bigcup_n L_n((t))$  et  $L_\infty \llbracket t \rrbracket = \bigcup_n L_n \llbracket t \rrbracket$ -modules libres de rang  $d$ .

**IB2. Théorie de Hodge  $p$ -adique.** Comme l'on a déjà remarqué, la plupart des objets de la théorie de Hodge  $p$ -adique peuvent être exprimés purement en terme des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Suivant ce programme, commencé par Fontaine [1990], on définit les invariants suivants :

**Définition 1.** Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de rang  $d$ . On définit

$$D_{\text{cris}}(D) = (D[1/t])^\Gamma = (D \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[1/t])^\Gamma, \quad D_{\text{dR}}(D) = (D_{\text{dif}}(D))^\Gamma,$$

qui sont des  $L$ -espaces vectoriels de dimension finie.

On munit  $D_{\text{dR}}(D)$  de sa filtration de Hodge, donnée par  $\text{Fil}^i D_{\text{dR}}(D) = D_{\text{dR}}(D) \cap t^i D_{\text{dif}}^+(D) = (t^i D_{\text{dif}}^+(D))^\Gamma$ . On observe que  $D_{\text{cris}}(D)$  est muni d'une action bijective du Frobenius  $\varphi$  ainsi que d'une filtration induite par l'inclusion  $D_{\text{cris}}(D) \subseteq D_{\text{dR}}(D)$  définie par  $x \in D_{\text{cris}}(D) \mapsto \iota_n(\varphi^n(x)) \in D_{\text{dR}}(D)$ , où on a noté  $\iota_n = \varphi^{-n} : D^{[0,r_n]}[1/t] \rightarrow D_{\text{dif}}(D)$  l'application de localisation.<sup>11</sup> On a

$$\dim_L D_{\text{cris}}(D) \leq \dim_L D_{\text{dR}}(D) \leq \text{rang}_{\mathcal{R}} D,$$

où la première inégalité est évidente par ce qui précède et la dernière suit en remarquant que  $D_{\text{dif}}(D)$  est un  $L_\infty((t))$ -espace vectoriel de rang  $d = \text{rang}_{\mathcal{R}} D$  et  $D_{\text{dR}}(D) = (D_{\text{dif}}(D))^\Gamma$  est donc un  $(L_\infty((t)))^\Gamma = L$ -espace vectoriel de rang  $\leq d$ .

11. Il existe ici un petit abus évident en notant par  $\varphi^{-n}$  deux applications différentes, l'une étant l'application de localisation notée usuellement  $\iota_n$  et l'autre l'inverse de l'opérateur  $\varphi$  agissant sur  $D_{\text{cris}}(D)$ , mais cela ne devrait pas causer de problèmes de lecture.



**Définition 2.** Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}$ . On dit que  $D$  est *cristallin* (resp. *de Rham*) si l’inégalité  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{cris}}(D) \leq \text{rang}_{\mathcal{R}} D$  (resp.  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \leq \text{rang}_{\mathcal{R}} D$ ) est une égalité.

Si  $D$  est de Rham, on définit ses *ponds de Hodge–Tate* comme les opposés des entiers où la filtration change, c’est-à-dire l’ensemble  $\{-h \in \mathbb{Z} : \text{Fil}^h \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) / \text{Fil}^{h+1} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \neq 0\}$ .

**IB3.** *L’équation différentielle  $p$ -adique  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ .* Rappelons la construction de Berger [2002; 2008] de l’équation différentielle  $p$ -adique  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$  associée à un  $(\varphi, \Gamma)$ -module de de Rham  $D$  sur  $\mathcal{R}$ .

**Proposition I.3** [Berger 2008, théorème III.2.3]. *Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de rang  $d$ , de Rham, et, pour chaque  $n \geq m(D)$ , posons*

$$\mathbb{N}_{\text{rig}}^{[0, r_n]}(D) = \{x \in D^{[0, r_n]}[1/t] : \varphi^{-m}(x) \in L_m[[t]] \otimes_L \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \text{ pour tout } m \geq n\},$$

et  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D) = \varinjlim_n \mathbb{N}_{\text{rig}}^{[0, r_n]}(D)$ . Alors,  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}$ , de rang  $d$ , qui satisfait

- $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)[1/t] = D[1/t]$ .
- $\mathbf{D}_{\text{dif}, n}^+(\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)) = L_n[[t]] \otimes_L \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  pour tout  $n \geq m(D)$ .
- $\nabla(\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)) \subseteq t\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ .

Le  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$  ainsi obtenu est de Rham à poids de Hodge–Tate tous nuls. Remarquons que l’on peut reconstruire  $D$ , à partir de la donnée de  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$  et de la filtration de Hodge sur  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ , en utilisant la formule

$$D = \{x \in \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)[1/t] : \varphi^{-n}(x) \in \text{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)) \text{ pour tout } n \gg 0\}.$$

Si les poids de Hodge–Tate de  $D$  sont contenus dans  $[a, b]$ , on a des inclusions  $t^{-a}D \subseteq \mathbb{N}_{\text{rig}}(D) \subseteq t^{-b}D$ .

La troisième propriété de la proposition I.3 caractérisant  $\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$  permet de définir un opérateur différentiel

$$\partial := \frac{1}{t} \nabla : \mathbb{N}_{\text{rig}}(D) \rightarrow \mathbb{N}_{\text{rig}}(D),$$

satisfaisant les identités  $\partial \circ \varphi = p \varphi \circ \partial$  et  $\partial \circ \sigma_a = a \sigma_a \circ \partial$ . Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module de de Rham sur  $\mathcal{R}$ , on notera  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ .

**IB4.** *Les anneaux de Fontaine.* Rappelons la construction des anneaux de Fontaine associés à une extension galoisienne finie  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$ . Notons  $K_n = KF_n = K(\mu_{p^n})$ ,  $n \geq 1$ ,  $K_\infty = KF_\infty = \bigcup_{n \geq 1} K_n$ ,  $K_0 = K \cap \mathbb{Q}_p^{\text{nr}}$  la plus grande sous-extension de  $K$  non ramifiée et  $K'_0$  la plus grande extension non ramifiée de  $K_0$  dans  $K_\infty$ . Notons  $\mathcal{H}_K = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p / K_\infty)$ ,  $\Gamma_K = \text{Gal}(K_\infty / K)$ .

La théorie du corps des normes (cf., par exemple, [Colmez 2008] ou [Berger 2008, §I.2]) permet de construire des extensions étales  $\mathcal{E}_K^\dagger / \mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^\dagger$  de degré  $[K_\infty : F_\infty]$ , munies d’une action du Frobenius  $\varphi$  et du groupe  $\Gamma_K$ . Plus précisément, soit  $\tilde{\mathbb{E}} = \varprojlim_{x \rightarrow x^p} \mathbb{C}_p = \mathbb{C}_p^b$  le corps basculé de  $\mathbb{C}_p$ . Il est un corps de caractéristique  $p$ , algébriquement clos et muni d’une valuation  $v_{\mathbb{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$  pour laquelle il est complet. Notons  $1 \neq \varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots) \in \tilde{\mathbb{E}}$ , et  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  l’anneau des entiers de  $\tilde{\mathbb{E}}$ , qui s’identifie à la limite projective  $\varprojlim_{x \rightarrow x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} / \mathfrak{a}$  pour n’importe quel idéal  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  contenant  $p$  et différent de l’idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ . Soient  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{F}_p((\varepsilon - 1))$  et  $\mathbb{E}$  la clôture séparable de  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}$  dans  $\tilde{\mathbb{E}}$ . La théorie du corps des normes permet aussi de montrer que  $\text{Gal}(\mathbb{E} / \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}) \cong \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}$ . Si  $K / \mathbb{Q}_p$  est une extension finie galoisienne de  $\mathbb{Q}_p$ , on pose  $\mathbb{E}_K = \mathbb{E}^{\mathcal{H}_K}$ . On dispose d’une application bien définie et injective  $\varprojlim_{x \rightarrow N_{K_n / K_{n-1}}(x)} \mathcal{O}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}^+$  d’image l’anneau des entiers  $\mathbb{E}_K^+$  de  $\mathbb{E}_K$ , qui fournit une uniformisante  $\tilde{\pi}_K$

de l'extension  $\mathbb{E}_K/\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}$  (l'image d'un système compatible  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\omega_n$  est une uniformisante de  $K_n$  pour  $n$  assez grand). Soit  $\bar{P}(X) = X^{d_{K_\infty}} + \bar{a}_{d_{K_\infty}-1}X^{d_{K_\infty}-1} + \dots + \bar{a}_0 \in \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}[X]$ , où  $d_{K_\infty} = [K_\infty : F_\infty]$  et  $\bar{a}_i \in \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}$ , le polynôme minimal de  $\bar{\pi}_K$  sur  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}$ . Enfin, si  $P \in \mathbb{Z}_p[[T]][X]$  est tel que sa réduction modulo  $p$  évaluée en  $T = \varepsilon - 1$  est  $\bar{P}(X)$ , alors  $\mathcal{E}_K^\dagger = \mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^\dagger[X]/P(X)$  et on note  $\pi_K$  l'image de  $X$  dans ce quotient, dont la réduction modulo  $p$  est  $\bar{\pi}_K$ .

L'anneau  $\mathcal{E}_K^\dagger$  s'identifie à l'anneau des séries formelles  $f(T_K) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_K^k$ ,  $a_k \in K'_0$ , à coefficients bornés, qui convergent sur une couronne  $0 < v_p(T_K) \leq r$  pour un  $r$  assez petit (qui dépend de  $f$ ). On peut de la sorte définir les anneaux  $\mathcal{E}_K^{[r,s]}$ , qui s'identifient à l'espace des séries de Laurent à coefficients dans  $K'_0$ , convergentes sur la couronne  $C_{[r/e, s/e]} = \{z \in \mathbb{C}_p : r/e \leq v_p(z) \leq s/e\}$ , où  $e$  dénote l'indice de ramification de l'extension  $K_\infty/F_\infty$ , muni de la norme spectrale  $v^{[r,s]}$ , ainsi que  $\mathcal{E}_K^{[0,s]}$ ,  $\mathcal{E}_K^{\dagger,r}$ , etc. En complétant  $\mathcal{E}_K^\dagger$  pour la famille de normes  $v^{[r,s]}$ , on obtient une extension étale  $\mathcal{R}_K/\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$  et on a

$$\text{Gal}(\mathcal{R}_K/\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}) = \text{Gal}(\mathcal{E}_K^\dagger/\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^\dagger) = \text{Gal}(K_\infty/F_\infty).$$

On a un opérateur de dérivation  $\partial$  agissant sur  $\mathcal{R}_K$  : si  $K/\mathbb{Q}_p$  est une extension non ramifiée, on a  $T_K = T$  et  $\partial f(T) = (1+T)f'(T)$  pour  $f(T) \in \mathcal{R}_K$  ; si  $K/\mathbb{Q}_p$  est ramifiée et  $P \in \mathbb{Z}_p[[T]][X]$  dénote le polynôme minimal de  $T_K \in \mathcal{E}_K^\dagger$  sur  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^\dagger$  comme ci-dessus, l'identité  $P(T_K) = 0$  et le fait que  $\partial$  est une dérivation donnent la formule

$$\partial T_K = -P'(T_K)^{-1}(\partial P)(T_K),$$

où, si  $P = \sum f_i X^i \in \mathbb{Z}_p[[T]][X]$ ,  $\partial P = \sum \partial f_i \cdot X^i$ .

Enfin, soit  $\ell_T = \log(T)$  une variable formelle et étendons les actions  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  sur  $\mathcal{R}_K$  à des actions sur  $\mathcal{R}_K[\ell_T]$  par les formules

$$\varphi(\ell_T) = p\ell_T + \log(\varphi(T)/T^p), \quad \gamma(\ell_T) = \ell_T + \log(\gamma(T)/T).$$

La dérivation  $\partial$  agit sur  $\ell_T$  par  $\partial \ell_T = T^{-1} \partial T = 1 + T^{-1}$ . On définit un opérateur de monodromie sur  $\mathcal{R}_K[\ell_T]$  comme la dérivation  $\mathcal{R}_K$ -linéaire  $N$  telle que  $N(\ell_T) = -p/(p-1)$ .

**IB5. Théorème de monodromie  $p$ -adique et surconvergence.** Soit

$$\mathfrak{d}_{\mathbb{E}_K/\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}} \subseteq \mathbb{E}_K$$

la différentielle de l'extension  $\mathbb{E}_K/\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}$  et posons  $\delta_K = d_{K_\infty} \cdot v_{\mathbb{E}}(\mathfrak{d}_{\mathbb{E}_K/\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}}) \in \mathbb{N}$ , où  $d_{K_\infty} = [\mathbb{E}_K : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_p}] = [K_\infty : F_\infty]$  comme plus haut. Rappelons (cf. [Colmez 2008, Proposition 4.12]) que, si  $c(K)$  dénote le conducteur de  $K$ <sup>12</sup> et  $n \geq c(K) + 1$  est un entier, alors  $[K_n : F_n] = d_{K_\infty}$  et  $\delta_K = d_{K_\infty} p^n v_p(\mathfrak{d}_{K_n/F_n})$ . En particulier, si  $K$  a suffisamment de racines de l'unité, dans la terminologie de [Colmez et Nizioł 2017], alors  $v_K = [K : \mathbb{Q}_p] v_p(\mathfrak{d}_{K/\mathbb{Q}_p})$ . On aura besoin des faits suivants :

**Lemme I.4** ([Colmez et Nizioł 2017, Lemma 2.17]). *Si  $s < (\delta_K + 1)^{-1}$ , alors  $\partial T_K \in T^{-\delta_K} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K^\dagger}^{\times,s}$  et on a  $v^{[r,s]}(\partial T_K) \geq -1$  pour tout  $0 < r < s$ .*

Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham et notons  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ . D'après le théorème de monodromie  $p$ -adique (cf. [Berger 2008, théorème III.2.1]), il existe une extension galoisienne finie  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  tel que l'on a un

12. Le conducteur de  $K$  est la borne inférieure de l'ensemble des  $t$  tels que le groupe de ramification supérieure  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}^{(t)}$  agit trivialement sur  $K$ .

isomorphisme

$$\mathcal{R}_K[\ell_T] \otimes_{K_0} (\mathcal{R}_K[\ell_T] \otimes_{\mathcal{R}} \Delta)^{\Gamma_K} \cong \mathcal{R}_K[\ell_T] \otimes_{\mathcal{R}} \Delta.$$

On note

$$D_{\text{pst}} = (\mathcal{R}_K[\ell_T] \otimes_{\mathcal{R}} \Delta)^{\Gamma_K}$$

l'espace des  $\Gamma_K$ -solutions de  $\Delta$ . C'est un  $(\varphi, N, \text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p))$ -module filtré (la filtration dépend de la donnée de  $D$ ). Le résultat suivant permet de reconstruire  $\Delta$  à partir de  $D_{\text{pst}}$ .

**Proposition I.5** [Berger 2008, théorèmes III.2.1 et C]. *Soient  $D$  et  $D_{\text{pst}}$  comme ci-dessus. Si  $K$  est une extension galoisienne finie de  $\mathbb{Q}_p$  telle que  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  agit sur  $D_{\text{pst}}$  à travers  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$ , alors*

$$\Delta = (\mathcal{R}_K[\ell_T] \otimes_{K_0} D_{\text{pst}})^{\text{Gal}(K_{\infty}/F_{\infty}), N=0},$$

le groupe  $\text{Gal}(K_{\infty}/F_{\infty})$  agissant sur  $D_{\text{pst}}$  à travers  $\text{Gal}(K/(K \cap F_{\infty})) \subseteq \text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$ , et sur  $\mathcal{R}_K$  à travers  $\text{Gal}(K_{\infty}/F_{\infty}) = \text{Gal}(\mathcal{R}_K/\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p})$  (il agit trivialement sur l'élément  $\ell_T$ ).

On récupère l'action de  $\Gamma$  via l'action résiduelle du groupe  $\Gamma_K$  sur le module  $\Delta$ , l'action de  $\varphi$  via son action (diagonale) sur le produit tensoriel et l'action de l'opérateur  $\partial$  à travers celle sur  $\mathcal{R}_K[\ell_T]$ . Le lemme suivant sera très utile pour nos constructions futures.

**Lemme I.6.** *Il existe, pour tout  $0 < s < (\delta_K + 1)^{-1}$ , des sous- $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}$ -modules  $\Delta^{[0,s]}$  de  $\Delta$ , munis d'une famille de valuations  $(v^{[r,s]})_{0 < r < s}$ , satisfaisant les conditions du lemme I.2, et de sorte que, pour tout  $0 < r < s$ , la norme  $v^{[r,s]}$  de l'opérateur  $\partial$  sur  $\Delta^{[0,s]}$  soit  $\geq -s - 1$ .*

*Démonstration.* Débarrassons-nous d'abord de l'opérateur  $N$ . Le module  $M = K_0[\ell_T] \otimes_{K_0} D_{\text{pst}}$  est un  $K_0[\ell_T]$ -module libre de rang  $d$  muni d'une action de  $G = \text{Gal}(K_{\infty}/F_{\infty})$  (agissant sur le facteur de droite) et de  $N$  (agissant diagonalement) et on affirme qu'il contient un système libre de générateurs  $w_1, \dots, w_d$  tués par  $N$ . En effet, notons  $\alpha = -p/(p - 1)$  la valeur de  $N$  sur  $\ell_T$  et posons, pour  $v_1, \dots, v_d$  une base quelconque de  $D_{\text{pst}}$ ,

$$w_i = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{-k}}{k!} \ell_T^k \otimes N^k v_i, \quad 1 \leq i \leq d,$$

chaque somme étant une somme finie car  $N$  est nilpotent. Alors les  $w_i$  sont par construction tués par  $N$  et ils forment un système libre de générateurs de  $M$ , car l'opérateur  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (\alpha^{-k}/k!) \ell_T^k \otimes N^k$  est inversible,  $N$  étant nilpotent. Le module  $W = (K_0[\ell_T] \otimes D_{\text{pst}})^{N=0}$  est donc un  $(K_0[\ell_T])^{N=0} = K_0$ -espace vectoriel de dimension  $d$ , muni d'une action de  $G$ , et on a

$$K_0[\ell_T] \otimes_{K_0} W = K_0[\ell_T] \otimes_{K_0} D_{\text{pst}}.$$

Soit  $v_1, \dots, v_d$  une base de  $D_{\text{pst}}$  de sorte que la matrice de l'opérateur  $N$  soit à coefficients entiers,<sup>13</sup> et soient  $w_1, \dots, w_d$  les éléments associés à cette base formant une base de  $W$  fournis par le paragraphe précédent. Posons, pour  $0 < s < (\delta_K + 1)^{-1}$ ,

$$\Delta^{[0,s]} = (\mathcal{O}_K^{[0,s]} \otimes W)^G \subseteq \mathcal{O}_K^{[0,s]} \otimes W \subseteq \mathcal{R}_K \otimes W.$$

13. Ceci est possible grâce au fait que  $N$  est nilpotent : si  $v_1, \dots, v_d$  est une base de  $D_{\text{pst}}$  de sorte que la matrice de  $N$  soit triangulaire supérieure avec des zéros sous la diagonale, alors on peut choisir des entiers  $0 < n_2 < n_3 < \dots < n_d$  de sorte que la matrice de  $N$  dans la base  $v_1, p^{n_2} v_2, \dots, p^{n_d} v_d$  soit à coefficients entiers comme on voulait.

On a  $G \cong \text{Gal}(\mathcal{R}_K/\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p})$ , et le théorème de Hilbert 90 implique que  $H^1(G, \text{GL}_d(\mathcal{R}_K)) = 1$ . Le module  $W$  est donc  $\mathcal{R}_K$ -admissible au sens de Fontaine et on a un isomorphisme

$$\mathcal{R}_K \otimes_{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}} (\mathcal{R}_K \otimes_{K_0} W)^G \cong \mathcal{R}_K \otimes_{K_0} W,$$

induit par  $f \otimes (g \otimes x) \mapsto fg \otimes x$ , de  $\mathcal{R}_K$ -modules topologiques de rang  $d$  munis d'une action de  $G$ . Cet isomorphisme est en outre compatible avec les structures présentes sur  $\mathcal{R}_K$ . Cela veut dire en particulier que le  $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$ -module  $(\mathcal{R}_K \otimes_{K_0} W)^G$  est de dimension  $d$ .

Si  $s < (\delta_K + 1)^{-1}$ , alors  $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}} \mathcal{E}_K^{[0,s]}$ ,<sup>14</sup> d'où

$$(\mathcal{R}_K \otimes_{K_0} W)^G = (\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}} \mathcal{E}_K^{[0,s]} \otimes_{K_0} W)^G = \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}} (\mathcal{E}_K^{[0,s]} \otimes_{K_0} W)^G,$$

ce qui montre que

$$\Delta = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^{[0,s]}} \Delta^{[0,s]}.$$

De plus, le fait que  $\mathcal{E}_K^{[0,s/p]} \otimes_{\mathcal{E}_K^{[0,s]}} \varphi(\mathcal{E}_K^{[0,s]}) = \mathcal{E}_K^{[0,s/p]}$  et les formules pour l'action de  $\varphi$  sur  $\ell_T$  montrent que la deuxième condition du lemme 1.2 est satisfaite.

Les modules  $\mathcal{E}_K^{[0,s]} \otimes W$  sont des  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}$ -modules libres, dont une base est donnée par les éléments  $(T_K^i \otimes w_j)_{0 \leq i \leq d_\infty, 1 \leq j \leq d}$ , et ils sont munis d'une famille  $(v^{[r,s]})_{0 < r < s}$  de valuations définies par

$$v^{[r,s]} \left( \sum_{i,j} f_{ij} \cdot T_K^i \otimes w_j \right) = \inf_{i,j} v^{[r,s]}(f_{ij}) \quad (f_{ij} \in \mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}).$$

Calculons la norme de l'opérateur  $\partial$  sur la base décrite ci-dessus pour une de ces valuations. On a  $\partial(\ell_T) = 1 + T^{-1}$  et donc

$$\begin{aligned} \partial(w_i) &= \partial \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{-k}}{k!} \ell_T^k \otimes N^k v_i \right) \\ &= (1 + T^{-1}) \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{-k}}{(k-1)!} \ell_T^{k-1} \otimes N^k v_i \\ &= -\alpha^{-1} (1 + T^{-1}) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{-k}}{k!} \ell_T^k \otimes N^k (N v_i) \\ &= \sum_{l=1}^d -a_l \alpha^{-1} (1 + T^{-1}) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{-k}}{k!} \ell_T^k \otimes N^k v_l \\ &= \sum_{l=1}^d -a_l \alpha^{-1} (1 + T^{-1}) w_l, \end{aligned}$$

où  $N v_i = \sum_{l=1}^d a_l \cdot v_l$ , avec  $v_p(a_l) \geq 0$  pour tout  $l$ , par le choix de la base  $v_1, \dots, v_d$  de  $D_{\text{pst}}$ . On en déduit que, si  $A$  dénote l'anneau des entiers de  $K_0$  et  $W_0$  dénote le  $A$ -module engendré par les éléments

14. Comme on le voit, par exemple, en notant que, si  $s < (\delta_K + 1)^{-1}$ ,  $\mathcal{E}_K^{[0,s]}$  est un  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}$ -module libre de rang  $d_{K_\infty}$ , dont une base est formée par  $1, T_K, \dots, T_K^{d_{K_\infty}-1}$ , et donc  $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}} \mathcal{E}_K^{[0,s]} = \bigoplus_i \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}} \mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]} \cdot T_K^i = \bigoplus_i \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \cdot T_K^i = \mathcal{R}_K$ .

$w_1, \dots, w_d$ , alors (rappelons que  $\alpha = -p/(p - 1)$ )

$$\partial(W_0) \subseteq p^{-1}(1 + T^{-1}) \cdot W_0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} v^{[r,s]}(\partial(T_K^i \otimes w_j)) &= v^{[r,s]}(i\partial(T_K)T_K^{i-1} \otimes w_j + T_K^i \otimes \partial w_j) \\ &\geq \inf\{v^{[r,s]}(i\partial(T_K)T_K^{i-1} \otimes w_j), v^{[r,s]}(p^{-1}(1 + T^{-1}))\} \\ &\geq \inf\{-1, -1 - s\} \\ &= -s - 1, \end{aligned}$$

où dans la première égalité on a utilisé la définition de  $\partial$ , dans la deuxième l'inégalité triangulaire et l'inclusion  $\partial(W_0) \subseteq p^{-1}(1 + T^{-1}) \cdot W_0$  et dans la troisième l'estimation du [lemme I.4](#) et le fait que  $v^{[r,s]}(p^{-1}(1 + T^{-1})) = -1 - s$ .

Vu que l'on a borné la norme de l'opérateur  $\partial$  sur une base de  $\mathcal{E}_K^{[0,s]} \otimes W$ , un petit calcul montre que

$$v^{[r,s]}(\partial z) \geq v^{[r,s]}(z) - s - 1$$

pour tout  $z \in \mathcal{E}_K^{[0,s]} \otimes W$ . En effet, écrivons  $z = \sum_{i,j} f_{ij} \cdot T_k^i \otimes w_j$ ,  $f_{ij} \in \mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}$ , de sorte que  $\partial(z) = \sum_{i,j} \partial f_{ij} \cdot T_k^i \otimes w_j + f_{ij} \cdot \partial(T_k^i \otimes w_j)$ . On a alors

$$\begin{aligned} v^{[r,s]}(\partial z) &\geq \inf\left\{v^{[r,s]}\left(\sum_{ij} (\partial f_{ij})(T_K^i \otimes w_j)\right), v^{[r,s]}\left(\sum_{ij} f_{ij} \partial(T_K^i \otimes w_j)\right)\right\} \\ &= \inf\left\{\inf_{ij} v^{[r,s]}(\partial f_{ij}), v^{[r,s]}\left(\sum_{ij} f_{ij} \partial(T_K^i \otimes w_j)\right)\right\} \\ &\geq \inf\left\{\inf_{ij} v^{[r,s]}(f_{ij}) - s, \inf_{ij} v^{[r,s]}(f_{ij}) - s - 1\right\} \\ &= \inf_{ij} v^{[r,s]}(f_{ij}) - s - 1 = v^{[r,s]}(z) - s - 1, \end{aligned}$$

où la première ligne suit de l'inégalité triangulaire, la deuxième suit de la définition de  $v^{[r,s]}$  sur  $\mathcal{E}_K^{[0,s]} \otimes W$ , la troisième de l'inégalité (sur  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}$ )  $v^{[r,s]}(\partial f_{ij}) \geq v^{[r,s]}(f_{ij}) - s$  et du calcul du paragraphe précédent et la dernière suit en appliquant la définition de  $v^{[r,s]}$  une autre fois.

Enfin,  $\Delta^{[0,s]} \subseteq \mathcal{E}_K^{[0,s]} \otimes W$  est stable par  $\partial$ , il est muni par restriction d'une famille de valuations  $v^{[r,s]}$  et, par ce qui précède, la norme  $v^{[r,s]}$  de  $\partial$  agissant sur  $\Delta^{[0,s]}$  est bornée par  $-s - 1$ , ce qui permet de conclure. □

**Remarque I.7.** — Si  $0 < r < s < (\delta_K + 1)^{-1}$ , les modules

$$\Delta^{[r,s]} = \mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[r,s]} \otimes_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{[0,s]}} \Delta^{[0,s]} = (\mathcal{E}_K^{[r,s]} \otimes W)^G,$$

complétés de  $\Delta^{[0,s]}$  pour la valuation  $v^{[r,s]}$ , sont des  $\mathcal{E}^{[r,s]}$ -modules de rang  $d$ , munis de la valuation  $v^{[r,s]}$  pour les quelles la norme de  $\partial$  est  $\geq -s - 1$ . On a

$$\Delta = \varinjlim_{s>0} \varprojlim_{0<r<s} \Delta^{[r,s]}.$$

— Le lemme I.6 ci-dessus montre que le rayon de surconvergence du module  $\Delta$  peut être majoré en termes du conducteur de la plus petite extension galoisienne  $K/\mathbb{Q}_p$  telle que  $\mathcal{G}_K$  agit trivialement sur  $D_{\text{pst}}$ . Si  $V \in \text{Rep}_L \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  est de Rham, ceci permet de borner le rayon de surconvergence de  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(V)$  en termes de la plus petite extension (galoisienne)  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  sur laquelle  $V$  dévient semi-stable.

**IB6.**  $(\varphi, \Gamma)$ -modules relatifs. Soit  $A$  une algèbre affinoïde sur  $\mathbb{Q}_p$ . L'anneau de Robba  $\mathcal{R}_A$  relatif à  $A$  est défini en posant, pour  $0 < r < s$ ,

$$\mathcal{R}_A^{[r,s]} = \mathcal{R}^{[r,s]} \widehat{\otimes} A, \quad \mathcal{R}_A^{]0,s[} = \varinjlim_{0 < r < s} \mathcal{R}_A^{[r,s]}, \quad \mathcal{R}_A = \varinjlim_{s > 0} \mathcal{R}_A^{]0,s[},$$

où le premier produit tensoriel est le produit tensoriel complété entre deux espaces de Banach. On peut montrer que  $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\otimes} A$  (produit tensoriel complété inductif ou projectif entre deux espaces topologiques localement convexes). Ceci s'interprète en termes de fonctions analytiques sur des espaces rigides : si  $I \subseteq ]0, 1[$  est un intervalle d'extrémités dans  $p^{\mathbb{Q}}$  et  $A^1 = \text{Sp}(\mathbb{Q}_p\langle T \rangle)$  dénote la droite affine rigide de paramètre  $T$ , en notant  $B_I$  l'ouvert admissible de  $A^1$  défini par  $v_A(T) \in I$  ( $v_A = -\log_p |\cdot|_A$  dénote la valuation de l'algèbre affinoïde  $A$ ), on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{R}_A^I \cong \mathcal{O}(\text{Sp}(A) \times B_I).$$

On a aussi une interprétation en termes de séries de Laurent (resp. de puissances si  $0 \in I$ ) à coefficients dans  $A$  de la manière évidente. On a un endomorphisme  $A$ -linéaire d'anneaux  $\varphi : \mathcal{R}_A^{]0,s[} \rightarrow \mathcal{R}_A^{]0,s/p[}$ , qui envoie  $T$  sur  $(1+T)^p - 1$ , induisant une action de  $\varphi$  sur  $\mathcal{R}_A$  et on a une action continue du groupe  $\Gamma$ , agissant par  $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$ ,  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ , sur tous les anneaux définis ci-dessus.

Pour un module  $D^{]0,s[}$  sur  $\mathcal{R}_A^{]0,s[}$  et  $0 < s' < s$ , on note

$$D^{]0,s'[} = D^{]0,s[} \otimes_{\mathcal{R}_A^{]0,s[}} \mathcal{R}_A^{]0,s'[} \quad \text{et} \quad \varphi^*(D^{]0,s[}) = D^{]0,s[} \otimes_{\mathcal{R}_A^{]0,s[, \varphi}} \mathcal{R}_A^{]0,s/p[}.$$

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A^{]0,s[}$  est un module projectif de type fini  $D^{]0,s[}$  sur  $\mathcal{R}_A^{]0,s[}$ , muni d'un isomorphisme  $\mathcal{E}^{]0,s/p[}$ -linéaire  $\tilde{\varphi} : \varphi^*(D^{]0,s[}) \rightarrow D^{]0,s/p[}$  et d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$ , commutant avec  $\tilde{\varphi}$  dans le sens évident. L'isomorphisme  $\varphi^*(D^{]0,s[}) \rightarrow D^{]0,s/p[}$  induit, pour tout  $0 < s' < s$ , des opérateurs semi-linéaires  $\varphi : D^{]0,s'[} \rightarrow D^{]0,s'/p[}$ , définis comme la composée

$$D^{]0,s'[} = D^{]0,s[} \otimes_{\mathcal{R}_A^{]0,s[}} \mathcal{R}_A^{]0,s'[} \rightarrow \varphi^*(D^{]0,s[}) \otimes_{\mathcal{R}_A^{]0,s[}} \mathcal{R}_A^{]0,s'[} \rightarrow D^{]0,s/p[} \otimes_{\mathcal{R}_A^{]0,s[}} \mathcal{R}_A^{]0,s'/p[} = D^{]0,s'/p[},$$

la première flèche étant celle induite par  $D^{]0,s[} \rightarrow \varphi^*(D^{]0,s[})$ ,  $x \mapsto x \otimes 1$  et la deuxième étant  $\tilde{\varphi} \otimes \varphi$ .

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$  est un  $\mathcal{R}_A$ -module (projectif de type fini)  $D$  tel qu'il existe  $s > 0$  et un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D^{]0,s[}$  sur  $\mathcal{R}_A^{]0,s[}$  tel que  $D \cong D^{]0,s[} \otimes_{\mathcal{R}_A^{]0,s[}} \mathcal{R}_A$ .

Plus généralement, si  $X$  est un espace rigide analytique sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $r \geq 0$ , on définit  $\mathcal{R}_X^{]0,r[}$  comme le faisceau des fonctions rigides analytiques sur  $X \times B_{]0,r[}$ ,  $\mathcal{R}_X = \varinjlim_{r < 0} \mathcal{R}_X^{]0,r[}$  et un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_X$  est une collection compatible de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{R}_A$  pour chaque ouvert admissible  $A$  de  $X$ .

**IB7.** *Cohomologie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.* Si  $V \in \text{Rep}_L \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  est une représentation  $p$ -adique de  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  et  $\gamma$  est un générateur topologique de  $\Gamma$ ,<sup>15</sup> le complexe

$$0 \rightarrow \mathbf{D}(V) \xrightarrow{x \mapsto ((1-\varphi)x, (1-\gamma)x)} \mathbf{D}(V) \oplus \mathbf{D}(V) \xrightarrow{(x,y) \mapsto (1-\gamma)x - (1-\varphi)y} \mathbf{D}(V) \rightarrow 0$$

calcule la cohomologie galoisienne de  $V$  en termes de son  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathbf{D}(V)$  sur  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}$ , associé (cf. [Herr 2001]). D’après [Liu 2008; Kedlaya et al. 2014], on peut définir la cohomologie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l’anneau de Robba  $\mathcal{R}_A$  relatif à une algèbre affinoïde  $A$  sur  $\mathbb{Q}_p$  (et, plus généralement, sur un espace analytique rigide sur une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ), retrouvant les constructions de Herr dans le cas d’un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale au-dessus d’un point.

Soient  $A$  une algèbre affinoïde sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$ . On note  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  la partie de  $p$ -torsion de  $\Gamma$  (qui est triviale si  $p \neq 2$ , et cyclique d’ordre 2 quand  $p = 2$ ). Soit  $\gamma \in \Gamma$  tel que son image dans  $\Gamma/\Gamma'$  en est un générateur topologique. On pose  $\gamma_0 = \gamma$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $\gamma_n$  un générateur topologique de  $\Gamma_n$ . Pour  $\delta \in \{\varphi, \psi\}$  et  $\gamma' \in \{\gamma_n : n \geq 0\}$ , on note  $D' = D^{\Gamma'}$  si  $n = 0$  et  $D' = D$  si  $n \geq 1$ , et on définit le complexe

$$\mathcal{C}_{\delta, \gamma'}^*(D) : 0 \rightarrow D' \rightarrow D' \oplus D' \rightarrow D' \rightarrow 0,$$

où les flèches sont données, respectivement, par  $x \mapsto ((\delta - 1)x, (\gamma' - 1)x)$  et  $(x, y) \mapsto (\gamma' - 1)x - (\delta - 1)y$ . Les modules  $H_{\delta, \gamma'}^i(D)$  sont définis comme les groupes de cohomologie de ce complexe. Quand  $n = 0$ , on note  $H_{\delta, \gamma}^i(D) = H_{\delta, \gamma_0}^i(D)$ .

**Proposition I.8** [Kedlaya et al. 2014, Proposition 2.3.6, Theorem 4.4.2]. *Soient  $A$  une algèbre affinoïde sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}_A$ . Les complexes  $\mathcal{C}_{\varphi, \gamma'}(D)$  et  $\mathcal{C}_{\psi, \gamma'}(D)$  sont quasi-isomorphes et les groupes de cohomologie  $H_{\varphi, \gamma'}^i(D)$  sont des  $A$ -modules de type fini, compatibles au changement de base. On a une dualité locale et une formule de Euler–Poincaré.*

**IB8.** *Cohomologie d’Iwasawa des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.* Soit  $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$  l’algèbre d’Iwasawa de  $\Gamma$ . On décompose  $\Gamma = \Gamma^{\text{tors}} \times \tilde{\Gamma}$ , où  $\Gamma^{\text{tors}}$  désigne la partie de torsion de  $\Gamma$  et  $\tilde{\Gamma} \cong 1 + 2p\mathbb{Z}_p$  via le caractère cyclotomique, et on obtient un isomorphisme  $\Lambda \cong \mathbb{Z}_p[[\Gamma^{\text{tors}}]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\tilde{\Gamma}]]$ . Soit  $\gamma$  un générateur topologique de  $\tilde{\Gamma}$  et notons  $[\gamma]$  son image dans  $\Lambda$ . On obtient un isomorphisme  $\Lambda \cong \mathbb{Z}_p[[\Gamma^{\text{tors}}]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[T]]$  en envoyant  $[\gamma]$  sur  $1 + T$ .

Soit  $\Lambda_\infty = \mathcal{R}^+(\Gamma)$  l’algèbre algèbre de distributions sur  $\Gamma$ . Précisément, on obtient  $\mathcal{R}^+(\Gamma)$  en remplaçant la variable  $T$  par  $[\gamma] - 1$  dans la définition de  $\mathcal{R}^+$ . On peut de la sorte définir les anneaux  $\Lambda_n = \mathcal{R}^{[r_n, +\infty]}(\Gamma)$  et on a  $\Lambda_\infty = \varprojlim_n \Lambda_n$ . Le choix de l’isomorphisme  $\Lambda \cong \mathbb{Z}_p[[\Gamma^{\text{tors}}]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[T]]$  fait que  $\Lambda_n$  s’identifie aux fonction analytiques sur la boule  $v_p(T) \geq r_n$  et  $\Lambda_\infty$  à celui des fonctions analytiques sur la boule ouverte unité. Ce dernier espace s’identifie à l’anneau  $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O})$  des sections globales sur l’espace des poids  $p$ -adiques, et aussi, par le théorème d’Amice (cf. [Schneider et Teitelbaum 2003, Theorem 2.2]) au  $L$ -dual continu des fonctions localement analytiques sur  $\mathbb{Z}_p^\times$ .

On note (cf. [Kedlaya et al. 2014, Définition 4.4.7])  $\Lambda_n^t$  le module  $\Lambda_n$  muni de l’action de  $\Gamma$  via  $\gamma(f) = [\gamma^{-1}] \cdot f$ ,  $\gamma \in \Gamma$  et  $f \in \Lambda_n$ . On définit

$$\mathbf{Dfm} = \varprojlim_n \Lambda_n^t \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{R} = \varprojlim_n \varprojlim_{s>0} \varprojlim_{r<s} \mathcal{R}^{[s,r]} \widehat{\otimes} \Lambda_n^t.$$

15. Si  $p = 2$ , il faut considérer  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  la  $p$ -partie du sous-groupe de torsion de  $\Gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$  dont l’image dans le quotient  $\Gamma/\Gamma'$  soit un générateur topologique, et prendre les invariants par  $\Gamma'$  dans tous les modules de la suite ci-dessous.

Plus généralement, si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{R}$ , on définit sa déformation cyclotomique par

$$\mathbf{Dfm}(D) = D \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \Lambda_\infty^\iota = \varprojlim_n \varinjlim_{s>0} \varinjlim_{r<s} D^{[r,s]} \widehat{\otimes} \Lambda_n^\iota.$$

Les actions  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\Gamma$  sont données par les formules

$$\varphi(x \otimes \lambda) = \varphi(x) \otimes \lambda, \quad \psi(x \otimes \lambda) = \psi(x) \otimes \lambda, \quad \gamma(x \otimes \lambda) = \gamma(x) \otimes [\gamma^{-1}] \lambda,$$

pour  $x \in D$ ,  $\lambda \in \Lambda_\infty$  et  $\gamma \in \Gamma$ . Le module  $\mathbf{Dfm}(D)$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur l'anneau  $\mathcal{R}_X = \varprojlim_n \mathcal{R}_{X_n}$  de Robba relatif à l'espace des poids.

On définit la cohomologie d'Iwasawa de  $D$  comme

$$H_{\text{Iw}}^i(D) = H_{\psi, \gamma}^i(\mathbf{Dfm}(D)).$$

Ce sont, d'après le [proposition I.8](#), des  $\Lambda_\infty$ -modules de type fini. On peut donc voir les groupes de cohomologie d'Iwasawa comme des groupes de cohomologie à valeurs dans  $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_p^\times, D)$ .

Si  $\eta : \Gamma \rightarrow L^\times$  est un caractère, le changement de base par rapport à  $f_\eta : \Lambda_\infty \rightarrow L$ ,  $[\gamma] \mapsto \eta^{-1}(\gamma)$  fournit un isomorphisme

$$\mathbf{Dfm}(D) \otimes_{\Lambda_\infty, f_\eta} L \xrightarrow{\sim} D(\eta).$$

Si  $\mu \in H_{\text{Iw}}^i(D)$ , cet isomorphisme induit des morphismes de spécialisation

$$H_{\text{Iw}}^i(D) \rightarrow H_{\psi, \gamma}^i(D(\eta)), \quad \mu \mapsto \int_{\Gamma} \eta \cdot \mu,$$

la notation étant justifiée par l'interprétation classique de la cohomologie d'Iwasawa en termes des distributions.

Si  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$ , on définit le complexe  $\mathcal{C}_\psi^\bullet(D)$ , concentré en  $[1, 2]$ , par

$$[D \xrightarrow{\psi-1} D].$$

Le complexe  $\mathcal{C}_\psi^\bullet(D)$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{perf}}^{[0,2]}(\Lambda_\infty)$ <sup>16</sup> et calcule la cohomologie d'Iwasawa de  $D$  (cf. [\[Kedlaya et al. 2014, Theorem 4.4.8\]](#)). On a, en particulier, un isomorphisme

$$\text{Exp}^* : H_{\text{Iw}}^1(D) \rightarrow D^{\psi=1}$$

dont l'inverse est donnée par  $z \mapsto [((p-1)/p) \log(\chi(\gamma))(z \otimes 1), 0]$ .<sup>17</sup> Si  $z \in D^{\psi=1}$ , on note, afin d'alléger les notation,  $\mu_z$  l'élément  $(\text{Exp}^*)^{-1}(z) \in H_{\text{Iw}}^1(D)$ . Si  $n \geq 0$ , on a (cf. [\[Colmez 2010, §VIII.1.3\]](#) ou [\[Nakamura 2017, §2.2.3, Equation \(6\)\]](#)) la formule pour la spécialisation

$$\int_{\Gamma_n} \eta \cdot \mu_z = [\tau_n(\gamma_n)(z \otimes e_\eta), 0] \in H_{\psi, \gamma_n}^1(D(\eta)),$$

où  $\tau_n(\gamma_n) = p^{-n} \log(\chi(\gamma_n))$ , si  $n \geq 1$  et  $\tau_0(\gamma_0) = ((p-1)/p) \log(\chi(\gamma_0))$ .

16. Rappelons que, pour un anneau  $R$ ,  $\mathbf{D}_{\text{perf}}^{[0,2]}(R)$  dénote la sous-catégorie de la catégorie dérivée de la catégorie des modules sur  $R$  dont les objets sont quasi-isomorphes à un complexe borné formé par des  $R$ -modules projectifs finis et tel que leur cohomologie est concentrée en degrés  $[0, 2]$ .

17. Si  $p = 2$ , il faut appliquer à  $z$  le projecteur naturel sur le sous espace d'éléments  $\Gamma'$ -invariants. On évitera ce cas-ci, se traitant de la même manière mais avec une complication technique supplémentaire.



Terminons en mentionnant que  $\eta$  induit un automorphisme sur  $\Lambda_\infty$  donné par  $\eta([\gamma]) = \eta(\gamma)^{-1} \cdot [\gamma]$ , ce qui induit un isomorphisme de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules  $\mathbf{Dfm}(D) \cong \mathbf{Dfm}(D(\eta))$ , donné par

$$x \otimes [\gamma] \mapsto (x \otimes e_\eta) \otimes \eta(\gamma)^{-1}[\gamma],$$

et donc un isomorphisme de  $\Lambda_\infty$ -modules

$$H_{\text{Iw}}^i(D) \rightarrow H_{\text{Iw}}^i(D(\eta)), \quad \mu \mapsto \mu \otimes e_\eta.$$

On a, par exemple,

$$\int_\Gamma \eta \cdot \mu = \int_\Gamma 1 \cdot (\mu \otimes e_\eta).$$

**IB9.** *Applications exponentielles.* Si  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  est de Rham et  $n \geq 0$ , on note

$$\exp_{D, F_n} : L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \rightarrow H_{\varphi, \gamma_n}^1(D), \quad \exp_{D, F_n}^* : H_{\varphi, \gamma_n}^1(D) \rightarrow L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D),$$

les applications exponentielle et exponentielle duale de Bloch–Kato comme définies dans [Nakamura 2014, §2.3, §2.4]. Quand cela ne pose pas de problèmes, on omettra les indices dans les notations des applications exponentielles.

Explicitement [Nakamura 2014, Lemma 2.12(1)], si  $x \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = (\mathbf{D}_{\text{dR}}(D))^\Gamma$ , alors il existe  $m$  tel que  $x \in \mathbf{D}_{\text{dR}, m}(D)$ , et il existe aussi  $\tilde{x} \in D^{[0, r_m][1/t]}$  tel que  $\varphi^{-k}(\tilde{x}) - x \in \mathbf{D}_{\text{dR}, k}^+(D)$  pour tout  $k \geq m$ . Alors on a

$$\exp_{D, F_n}(x) = [(\gamma_n - 1)\tilde{x}, (\varphi - 1)\tilde{x}] \in H_{\varphi, \gamma_n}^1(D).$$

On remarquera que l’application  $\exp_D$  est nulle sur  $\text{Fil}^0 \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ .

Si  $M$  est un module muni d’une action de  $\Gamma$ , et  $\gamma' \in \{\gamma_n : n \geq 0\}$ , on pose <sup>18</sup>

$$C_{\gamma'}^*(M) = [M' \xrightarrow{\gamma'-1} M'],$$

et on définit les groupes de cohomologie  $H_{\gamma'}^i(M) = H^i(C_{\gamma'}^*(M))$ . Par exemple, si  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  et  $n \geq 0$ , alors

$$H_{\gamma_n}^0(\mathbf{D}_{\text{dR}}(D)) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)^{\Gamma_n} = L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D).$$

Si  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  est de Rham et  $n \geq 0$ , on a un isomorphisme  $L_\infty((t)) \otimes_{L_n} (L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)) \cong \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  et l’application  $L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \rightarrow H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\text{dR}}(D))$  qui envoie  $x \in L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  vers la classe de cohomologie  $[\log \chi(\gamma_n)(1 \otimes x)] \in H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\text{dR}}(D))$  est un isomorphisme (cf. [Nakamura 2014], juste avant le lemme 2.14). De plus, on a une application naturelle  $H_{\varphi, \gamma_n}^1(D) \rightarrow H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\text{dR}}^+(D)) \rightarrow H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\text{dR}}(D))$  définie par  $[(x, y)] \mapsto [\varphi^{-m}x]$ , où  $m \gg 0$  et  $[\cdot]$  désote la classe de cohomologie correspondante. On définit

$$\exp_{D, F_n}^* : H_{\varphi, \gamma_n}^1(D) \rightarrow L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$$

comme la composition  $H_{\varphi, \gamma_n}^1(D) \rightarrow H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\text{dR}}^+(D)) \rightarrow H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\text{dR}}(D)) \xrightarrow{\sim} L_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ . Remarquons que, par construction, l’image de  $\exp_{D, F_n}^*$  tombe dans  $L_n \otimes \text{Fil}^0 \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ .

18. Comme précédemment,  $M' = M^{\Gamma'}$  si  $\gamma' = \gamma_0$  et  $M' = M$  autrement.

**IB10.** *Exponentielle de Perrin-Riou.* Rappelons la formulation de l'application exponentielle de Perrin-Riou pour un  $(\varphi, \Gamma)$ -module de de Rham (cf. [Nakamura 2014; Berger 2003]) et la loi de réciprocité. On définit, pour  $h \geq 0$ ,<sup>19</sup> l'opérateur différentiel

$$\nabla_h = (\nabla - h + 1) \circ (\nabla - h + 2) \circ \cdots \circ \nabla \in \Lambda_\infty.$$

**Lemme I.9** [Nakamura 2014, Lemma 3.6]. *Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham et soit  $h \geq 1$  tel que  $\text{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ . Alors  $\nabla_h(\mathbb{N}_{\text{rig}}(D)) \subseteq D$  et il induit un opérateur  $\Lambda_\infty$ -linéaire*

$$\nabla_h : \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)^{\psi=1} \rightarrow D^{\psi=1}.$$

Si  $x \in \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)^{\psi=1}$  et  $n \geq 0$ , l'expression  $[\varphi^{-n}x]_j$ ,<sup>20</sup> pour  $j \in \mathbb{N}$ , n'est définie que pour  $n$  assez grand. Pourtant, l'identité  $\text{Tr}_{L_m/L_n} \circ \varphi^{-m} = \varphi^{-m} \circ \psi^{m-n}$ ,  $m \geq n \geq 0$ , nous permet de lui donner toujours un sens en utilisant les traces et en considérant les valeurs  $p^{-m} \text{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m}x]_j$ , où  $m$  est n'importe quel entier assez grand.

**Théorème I.10** [Nakamura 2014, Theorem 3.10]. *Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham,  $h \geq 1$  un entier tel que  $\text{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ ,  $z \in \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)^{\psi=1}$  et  $n \geq 0$ . On a :*

- (i) *Si  $j > 0$  et si il existe  $z_j \in \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)^{\psi=p^{-j}}$  vérifiant  $\partial^j z_j = z$ , ou si  $-(h-1) \leq j \leq 0$  et  $z_j = \partial^{-j} z$ , alors, on a, pour  $m \gg 0$ ,*

$$\int_{\Gamma_n} \chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z} = \frac{p^{m(j-1)}}{\Gamma^*(-j-h+1)} \exp(\text{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m}z_j]_0 \otimes t^{-j}e_j).$$

- (ii) *Si  $j \geq h$ , on a, pour  $m \gg 0$ ,*

$$\exp^*\left(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z}\right) = \frac{p^{m(-j-1)}}{\Gamma^*(-j-h+1)} \text{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m}\partial^j z]_0 \otimes t^j e_{-j}.$$

**Remarque I.11.** — Rappelons que, pour  $j \in \mathbb{Z}$ , l'élément  $e_j$  dénote une base du  $L$ -espace vectoriel  $L(j)$  muni d'actions de  $\Gamma$  et  $\varphi$  par les formules  $\sigma_a(e_j) = a^j \cdot e_j$ ,  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ , et  $\varphi(e_j) = e_j$ . Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module, on note  $D(j) = D \otimes_L L(j)$  la tordue de  $D$  par la  $j$ -ième puissance du caractère cyclotomique. Si  $D$  est de Rham,  $D(j)$  l'est aussi et on a  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(D(j)) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(j)) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \otimes L \cdot (t^{-j}e_j) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \otimes L \cdot e_j^{\text{dR}}$ , dans la notation de section IC3. Le terme  $[\varphi^{-m}z_j]_0$  appartient à  $L_m \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  et  $x \mapsto x \otimes t^{-j}e_j$  induit un isomorphisme  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(j))$ . La première égalité a lieu dans  $L_n \otimes H_{\varphi, \gamma}^1(D(j))$  (ou  $H_{\varphi, \gamma_n}(D(j))$ ) et la deuxième dans  $L_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(-j))$ .  
— Notons que  $\mu \mapsto \mu \otimes e_j$  induit, pour  $j \in \mathbb{Z}$ , un isomorphisme  $H_{\text{Iw}}^1(D) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Iw}}^1(D(j))$  et on a donc, pour  $z \in \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)^{\psi=1}$ ,

$$\int_{\Gamma_n} \chi(x)^{-j} \cdot \mu_z = \int_{\Gamma_n} 1 \cdot (\mu_z \otimes e_{-j}).$$

Si  $j \geq 0$ , l'élément  $\varphi^{-n}(z \otimes e_{-j}) \in L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(-j))$  s'écrit sous la forme  $t^{-j}\varphi^{-n}z \otimes t^j e_{-j}$  et, si on écrit  $\varphi^{-n}z = \sum_l d_l t^l \in L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ , l'expression  $[\varphi^{-n}(z \otimes e_{-j})]_0$  dénote l'élément  $d_j \otimes t^{-j}e_j$ , qui n'est autre que  $p^{-nj}/j! [\varphi^{-n}\partial^j z]_0 \otimes t^j e_{-j}$ . Le deuxième point du théorème est

19. Dans la formule ci-dessous,  $\nabla_0$  dénote simplement l'identité et  $\nabla_1 = \nabla$ .

20. Rappelons que, si  $x \in D^{[0, r_n]}$ , l'élément  $\varphi^{-n}(x)$  appartient à  $L_n((t)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ , s'écrit donc sous la forme  $\varphi^{-n}x = \sum_j d_j t^j$ ,  $d_j \in L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  et on note  $[\varphi^{-n}x]_j = d_j \in L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ .

donc une paraphrase de la loi de réciprocité de Cherbonnier–Colmez. Pour  $j < 0$ , le résultat est (au moins pour l’auteur) un peu plus mystérieux car l’opérateur  $\partial^j$ , devenant un opérateur d’intégration, fait apparaître des termes qu’on ne voyait pas directement dans le développement de  $\varphi^{-n}z$ .

- Si  $j \gg 0$  l’application  $\exp_{D(j), F_n}$  est bijective et on peut reformuler le résultat en disant que, si  $j \geq 0$  ou  $j \ll 0$ , alors, pour  $m \gg 0$ , on a

$$\mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m}\partial^jz]_0 = \frac{\Gamma^*(-j-h+1)}{p^{m(-j-1)}} \cdot \log\left(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \nabla_h \mu_z\right) \otimes e_{-j}^{\mathrm{dR}, \vee},$$

où  $\log$  dénote  $\exp^{-1}$  ou  $\exp^*$  selon que  $j \ll 0$  ou que  $j \geq 0$ .

- Si  $n \geq m(\Delta)$  ( $\Delta = \mathbb{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ ), alors l’introduction de  $m$  dans les formules est superflue et, comme  $\psi(z) = z$ , alors  $z \in D^{[0, r_n]}$  et on a

$$p^{-m(j+1)} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n}[\varphi^{-m}\partial^jz]_0 = \frac{[L_m : L_n]}{p^{m-n}} [\varphi^{-n(j+1)}\partial^jz].$$

On remarque que  $[L_m : L_n]/p^{m-n} = 1$  si  $n > 0$  et  $[L_m : L]/p^m = p - 1/p$ .

On se servira de la version suivante de la loi de réciprocité de Cherbonnier–Colmez, qui est un des ingrédients de la preuve du théorème précédent, mais pour lequel on n’a pas trouvé de référence précise.

**Proposition I.12.** *Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham,  $z \in D^{\psi=1}$ ,  $n \geq 0$  et  $j \geq 0$ . Alors, pour  $m \gg 0$ , on a l’égalité suivante dans  $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$  :*

$$\exp^*\left(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \mu_z\right) \otimes t^{-j} e_j = \frac{1}{j!} p^{-m(j+1)} \mathrm{Tr}_{L_m/L_n}([\varphi^{-m}\partial^jz]_0).$$

*Démonstration.* La formule  $\exp^*\left(\int_{\Gamma_n} \chi^{-j} \cdot \mu_z\right) = \exp^*\left(\int_{\Gamma_n} 1 \cdot \mu_{z \otimes e_{-j}}\right)$  permet de nous ramener au cas  $j = 0$ . En outre, la formule  $\mathrm{Tr}_{L_{n+1}/L_n}(\exp^*(x)) = \exp^*(\mathrm{cor}_{F_{n+1}/F_n}(x))$ <sup>21</sup> nous ramène à montrer le résultat pour  $n$  assez grand. En particulier on peut considérer  $n > 0$  de sorte que  $z \in D^{[0, r_n]}$  et on doit donc montrer

$$\exp^*\left(\int_{\Gamma_n} 1 \cdot \mu_z\right) = p^{-n}[\varphi^{-n}z]_0.$$

On a la formule pour la spécialisation  $\int_{\Gamma_n} 1 \cdot \mu_z = [\tau_n(\gamma_n)(z \otimes 1), 0] \in H_{\psi, \gamma}^1(D)$ , où  $\tau_n(\gamma_n) = p^{-n} \log(\chi(\gamma_n))$  (car on suppose  $n > 0$ ). Rappelons que l’application  $\exp^*$  est définie comme la composition du morphisme  $H_{\varphi, \gamma_n}^1(D) \rightarrow H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D))$  avec l’inverse de l’isomorphisme  $L_n \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D) \xrightarrow{\sim} H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D))$  donné par  $x \mapsto [\log(\chi(\gamma_n))(1 \otimes x)]$ .

Si  $z \in D^{\psi=1}$ , la classe de cohomologie  $[z, 0] \in H_{\psi, \gamma_n}^1(D)$  correspond à la classe  $[z, (1 - \gamma_n)^{-1}(1 - \varphi)z] \in H_{\varphi, \gamma}^1$  sous l’isomorphisme entre ces deux modules. L’image du cocycle  $[\tau_n(\gamma_n)(z \otimes 1), 0]$  par le morphisme  $H_{\varphi, \gamma_n}^1(D) \rightarrow H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D))$  est donc donnée par  $[\tau_n(\gamma_n)\varphi^{-n}z]$ .

Or,  $\varphi^{-n}z = \sum_{l \geq 0} a_l t^l$ ,  $a_l \in L_n[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D)$  et  $[\tau_n(\gamma_n) \sum_{l \geq 0} a_l t^l] = [\tau_n(\chi(\gamma_n))a_0]$  (dans  $H_{\gamma_n}^1(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(D))$ ), car tous les autres termes sont dans l’image de  $(1 - \gamma_n)$  (en effet, si  $l \neq 0$ ,  $a_l t^l = (1 - \gamma_n)(1 - \chi(\gamma_n)^l)^{-1} a_l t^l$ ), ce qui permet de conclure car  $a_0 = [\varphi^{-n}z]_0$ . □

21. Si  $[x, y] \in H_{\psi, \gamma_{n+1}}^1(D)$ , sa corestriction est définie par la formule

$$\mathrm{cor}_{F_{n+1}/F_n}([x, y]) = \left[ \frac{1 - \gamma_{n+1}}{1 - \gamma_n} x, y \right] \in H_{\psi, \gamma_n}^1(D),$$

cf. [Cherbonnier et Colmez 1999, lemme II.2.1].

**IC. La fonction  $L$  locale.**

**IC1.** *Distributions à valeurs dans un espace de type LF.* On reprend les constructions de la [section 0E3](#). Si  $M = \varprojlim_s \varinjlim_r M^{[r,s]}$  est un espace de type LF, on pose

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X}) \widehat{\otimes} M = \varprojlim_n \varinjlim_{s>0} \varinjlim_{0<r<s} \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} M^{[r,s]},$$

où le dernier produit tensoriel est le produit tensoriel usuel entre deux espaces de Banach. On dit que  $f$  est une fonction analytique sur  $\mathfrak{X}$  à valeurs dans  $M$  si  $f$  est un élément de  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}) \widehat{\otimes} M$ .

**IC2.** *Prolongement analytique de  $k \mapsto \partial^k$ .* Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de rang  $d$ , de Rham, et notons  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ . Rappelons que, d'après le [lemme I.6](#), si  $K/\mathbb{Q}_p$  dénote la plus petite extension galoisienne telle que  $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$  agit sur  $D_{\text{pst}}(D)$  à travers  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$  et si l'on note  $r(\Delta) = (\delta_K + 1)^{-1}$ , il existe, pour tout  $s < r(\Delta)$ , des sous- $\mathcal{E}^{[0,s]}$ -modules  $\Delta^{[0,s]}$  de  $\Delta$ , munis d'une famille de valuations  $v^{[r,s]}$ ,  $0 < r < s < r(\Delta)$ , pour lesquelles la norme de l'opérateur  $\partial$  satisfait

$$v^{[r,s]}(\partial) \geq -s - 1 \geq -(\delta_K + 1)^{-1} - 1.$$

On supposera dorénavant, et par commodité, que  $m(\Delta)$  est tel que  $r_m(\Delta) < r(\Delta)$ . De plus, pour  $s < r(\Delta)$ , les opérateurs

$$\varphi : \Delta^{[0,s]} \rightarrow \Delta^{[0,s/p]}, \quad \psi : \Delta^{[0,s/p]} \rightarrow \Delta^{[0,s]},$$

agissent de façon continue pour les valuations  $v^{[r,s]}$ . Rappelons aussi que l'on a

$$\Delta = \varinjlim_{s>0} \Delta^{[0,s]} = \varinjlim_{s>0} \varinjlim_{0<r<s} \Delta^{[r,s]}.$$

Si  $z \in \Delta^{\psi=0}$  et  $N > 0$ , on peut écrire  $z = \sum_{i \in (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times} (1+T)^i \varphi^N(z_i)$ ,  $z_i = \psi^N((1+T)^{-i}z)$ . La formule de Leibnitz et l'identité  $\partial \circ \varphi = p \varphi \circ \partial$  donnent, pour  $k \geq 0$ ,

$$\partial^k z = \sum_{i \in (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} i^{k-j} (1+T)^i p^{Nj} \varphi^N(\partial^j z_i).$$

Enfin, rappelons que, si  $\eta \in \mathfrak{X}(L)$  alors  $\omega_\eta$  dénote son poids (cf. la [section 0E3](#)) et que le poids du caractère  $x \mapsto x^k$  est  $k$ . L'identité de la formule ci-dessus suggère la proposition suivante, qui est le point de départ des constructions de cet article.

**Proposition I.13.** *Soient  $\kappa \in \mathfrak{X}$  et  $z \in \Delta^{\psi=0}$ . Alors, la série*

$$\sum_{i \in (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\omega_\kappa}{j} \kappa(i) i^{-j} (1+T)^i p^{Nj} \varphi^N(\partial^j z_i) \tag{2}$$

converge, pour  $N \gg 0$ , dans  $\Delta^{\psi=0}$ , et la somme ne dépend ni de  $N$  ni du choix du système de représentants de  $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ . L'application  $\kappa \mapsto \kappa(\partial)z$  ainsi définie est une fonction rigide analytique sur  $\mathfrak{X}$  à valeurs dans  $\Delta^{\psi=0}$ .

*Démonstration.* Notons, pour  $N > 0$  et  $0 < r < s < r(\Delta)p^{-N}$ ,  $C_{\varphi^N}^{[r,s]}$  et  $C_{\psi^N}^{[r,s]}$  les normes, relatives aux valuations  $v^{[r,s]}$  et  $v^{[p^N r, p^N s]}$ , des opérateurs

$$\varphi^N : \Delta^{[0, p^N s]} \rightarrow \Delta^{[0, s]}, \quad \psi^N : \Delta^{[0, s]} \rightarrow \Delta^{[0, p^N s]},$$

et, pour  $N > 0$  et  $0 < r < s < r(\Delta)$ ,  $C_{\partial}^{[r,s]}$  la norme de l'opérateur  $\partial$  pour la valuation  $v^{[r,s]}$ , de sorte que  $C_{\varphi^N}^{[r,s]}, C_{\psi^N}^{[r,s]} > -\infty$  et  $C_{\partial}^{[r,s]} \geq -s - 2$ .

Pour  $i \in (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ , on pose

$$g_j(\kappa) = \binom{\omega_\kappa}{j} \kappa(i) i^{-j} (1+T)^i p^{Nj} \varphi^N(\partial^j z_i).$$

Supposons  $s < r(\Delta)p^{-N}$ , on a alors

$$\begin{aligned} v^{[r,s]}(\varphi^N(\partial^j z_i)) &\geq v^{[p^N r, p^N s]}(\partial^j \psi^N((1+T)^{-i} z)) + C_{\varphi^N}^{[r,s]} \\ &\geq v^{[p^N r, p^N s]}(\psi^N((1+T)^{-i} z)) + C_{\varphi^N}^{[r,s]} + j C_{\partial}^{[p^N r, p^N s]} \\ &\geq v^{[r,s]}(z) + C_{\varphi^N}^{[r,s]} + j C_{\partial}^{[p^N r, p^N s]} + C_{\psi^N}^{[r,s]} \\ &\geq v^{[r,s]}(z) + C_{\varphi^N}^{[r,s]} + j(-p^N s - 1) + C_{\psi^N}^{[r,s]}. \end{aligned}$$

Remarquons d'ailleurs les estimations suivantes évidentes :

- $v^{[r,s]}((T+1)^i) = 0$ .
- $v^{[r,s]}(\binom{\omega_\kappa}{j}) = v_p(\binom{\omega_\kappa}{j}) \geq j(\inf(v_p(\omega_\kappa), 0) - 1/(p-1)) = jC_\kappa$ . Or  $\omega_\kappa = \log z_\kappa/q$  et donc

$$v_p(\omega_\kappa) \geq \inf_{k \geq 0} \{p^k v_p(z_\kappa - 1) - k\} - v_p(q).$$

Or, si  $\kappa \in \mathfrak{X}_n$ , la constante  $C_\kappa$  est bornée en fonction de  $n$ . En effet, si  $v_p(z_\kappa - 1) \geq 1/n$ , la formule pour  $\omega_\kappa$  donne  $C_\kappa \geq C_n = \min(\inf_{k \geq 0} \{p^k/n - k\} - v_p(q), 0) - 1/(p-1)$ . On en déduit donc

$$v_p\left(\binom{\omega_\kappa}{j}\right) \geq jC_n.$$

- $v^{[r,s]}(i^{-j}) = v_p(i^{-j}) = 0$ .
- $v^{[r,s]}(\kappa(i)) = v_p(\kappa(i)) = 0$ .

On en déduit :

$$\inf_{\kappa \in \mathfrak{X}_n} v^{[r,s]}(g_j(\kappa)) \geq v^{[r,s]}(z) + C_{\varphi^N}^{[r,s]} + C_{\psi^N}^{[r,s]} + j(C_n + N - p^N s - 1).$$

Par définition de fonction analytique sur  $\mathfrak{X}$  à valeurs dans  $\Delta$ , il faut montrer que, pour tout  $n > 0$ , il existe  $s > 0$  et  $N > 0$  tel que, pour tout  $r \in ]0, s]$ , l'expression (2) est convergente pour la valuation naturelle de  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} \Delta^{[r,s]}$ , et que les éléments dans  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} \mathcal{R}$  ainsi définis ne dépendent ni de  $N$  ni du système de représentants de  $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$  et sont compatibles par rapport aux applications naturelles de restriction  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_{n+1}) \widehat{\otimes} \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} \mathcal{R}$ .

Fixons  $n$  et choisissons  $N$  assez grand et  $s < r(\Delta)p^{-N}$  assez petit de sorte que

$$C_n + N - p^N s - 1 > 0.$$

On observe qu'aucun choix ne dépend de  $r$ . Ceci montre que la somme des  $g_j(\kappa)$  converge sur  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} \Delta^{[r,s]}$  pour tout  $r < s$  et définit, pour chaque  $n \geq 0$ , un élément dans  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}_n) \widehat{\otimes} \Delta$ .

On montre maintenant que l'expression ne dépend ni de  $N$  ni du choix du système de représentants de  $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ . Si l'on fixe  $n > 0$ ,  $N > 0$  et  $s > 0$  comme ci-dessus et un système de représentants de  $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ , l'expression (2) définit une fonction rigide analytique sur  $\mathfrak{X}_n$ . De plus, les valeurs de ces fonctions aux caractères  $x^k \in \mathfrak{X}_n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ne dépendent pas du choix de  $N$ . On conclut en remarquant que ces caractères sont Zariski denses dans  $\mathfrak{X}_n$ .

Enfin, les fonctions définies ne dépendent évidemment pas de  $n$ , et on conclut donc que (2) définit un élément de  $\mathcal{O}(\mathfrak{X}) \widehat{\otimes} \Delta^{\psi=0}$ . □

**Corollaire I.14.** *Soit  $N(n)$  le plus petit  $N$  qui fait que la formule (2) soit bien définie sur  $\mathfrak{X}_n$  et soit  $\kappa \in \mathfrak{X}_n$ . Alors, pour tous  $0 < r < s < r(\Delta)p^{-N(n)}$ ,  $\kappa(\partial)$  stabilise  $\Delta^{[r,s]}$ .*

**IC3. Bases et modules de de Rham.** Les éléments définis ci-dessous permettront de simplifier considérablement les notations futures ainsi que de clarifier certains facteurs apparaissant dans les formules d'interpolation (on y reviendra dans la [section ID1](#)).

Si  $\xi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère, on note  $e_\xi$  une base du  $L$ -espace vectoriel  $L(\xi)$  de dimension 1 muni d'actions de  $\varphi$  et  $\Gamma$  via les formules  $\varphi(e_\xi) = \xi(p) \cdot e_\xi$  et  $\sigma_a(e_\xi) = \xi(a) \cdot e_\xi$ ,  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ . Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module, on note  $D(\xi) = D \otimes \xi$  le module  $D \otimes_L L(\xi)$  (c'est le tordu de  $D$  par  $\xi$ ). Le choix de  $e_\xi$  fournit un isomorphisme de  $L$ -espaces vectoriels  $D \xrightarrow{\sim} D(\xi)$ ,  $x \mapsto x \otimes e_\xi$ . Si  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère, les mêmes constructions s'appliquent sur  $\eta$  en regardant  $\eta$  comme un caractère sur  $\mathbb{Q}_p^\times$  en posant  $\eta(p) = 1$ .

Soit  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  un caractère localement constant. L'élément  $G(\eta)e_\eta \in L_\infty(\eta)$  est fixé par l'action de  $\Gamma$  et on a donc un isomorphisme  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta)) = (L_\infty((t)) \cdot e_\eta)^\Gamma = L \cdot G(\eta)e_\eta$ , ce qui nous fournit un générateur  $e_\eta^{\text{dR}} = G(\eta)e_\eta$  de ce module. Si  $j \in \mathbb{Z}$ , on rappelle que l'on a noté  $e_j = e_{\chi^j}$  une base du module  $L(\chi^j)$ , de sorte que  $e_j^{\text{dR}} = t^{-j}e_j$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\chi^j))$ . Notons

$$e_{\eta,j} = e_\eta \otimes e_j,$$

qui est une base de  $L(\eta\chi^j)$ . L'élément

$$e_{\eta,j}^{\text{dR}} = e_\eta^{\text{dR}} \otimes e_j^{\text{dR}} = G(\eta)t^{-j} \cdot e_{\eta,j} = G(\eta)e_\eta \otimes t^{-j}e_j$$

constitue une base du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta\chi^j))$ .

Si  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  est de Rham, alors  $D(\eta\chi^j)$  l'est aussi et on a, par ce qui précède,

$$\mathbf{D}_{\text{dR}}(D(\eta\chi^j)) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D \otimes L(\eta\chi^j))^\Gamma = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \otimes L \cdot e_{\eta,j}^{\text{dR}},$$

de sorte que l'application  $x \mapsto x \otimes e_{\eta,j}^{\text{dR}}$  induit un isomorphisme  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(\eta\chi^j))$ .

Enfin, on note  $e_j^\vee = e_{\eta^{-1}}$ ,  $e_j^\vee = e_{-j}$  les éléments duaux, respectivement, de  $e_\eta$  et  $e_j$ , ainsi que

$$e_{\eta,j}^{\text{dR},\vee} = G(\eta)^{-1} \cdot e_\eta^\vee \otimes t^j e_j^\vee,$$

base du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta^{-1}\chi^{-j}))$ . L'application  $x \mapsto x \otimes e_{\eta,j}^{\text{dR},\vee}$  induit un isomorphisme  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(D(\eta\chi^j)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  et on a  $x \otimes e_{\eta,j}^{\text{dR}} \otimes e_{\eta,j}^{\text{dR},\vee} = x$  pour tout  $x \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ .

**IC4. Interpolation.** Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham,  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ ,  $\eta$  un caractère de Dirichlet de conducteur  $p^m$ ,  $m \geq m(\Delta)$  et  $\kappa(x) = z_\kappa^{\log x/q}$ . On pose

$$\Lambda_{D,z}(\eta\kappa) = G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-m}\kappa(\partial)(1-\varphi)z]. \tag{3}$$

L'application  $\varphi^{-m}$  est définie sur  $\Delta^{[0,r_m]}$  et l'expression ci-dessus n'a donc un sens que pour les caractères  $\kappa$  tels que  $\kappa(\partial)(1-\varphi)z \in \Delta^{[0,r_m]}$  et, dans ce cas, on a  $\Lambda_{D,z}(\eta\kappa) \in L_m \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ . Nous allons montrer que  $\Lambda_{D,z}$  est bien définie dès que  $\eta$  est un caractère de Dirichlet assez ramifié et  $\kappa$  est un caractère vivant dans un certain voisinage ouvert du caractère trivial et que les valeurs interpolées par  $\Lambda_{D,z}$  aux caractères spéciaux  $\eta\chi^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , sont reliées à des valeurs arithmétiquement intéressantes. Le théorème principal de ce chapitre est le suivant :

**Théorème I.15.** Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham,  $z \in \Delta^{\psi=1}$  et  $h \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ . Il existe une constante  $N(D)$  (ne dépendant que de l'extension  $K$  fournie par le théorème de monodromie  $p$ -adique et de  $p$ ),<sup>22</sup> telle que la formule (3) définit une fonction rigide analytique  $\Lambda_{D,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ , où  $\mathfrak{U}_D = \bigcup_{c(\eta) > m(\Delta)} \mathfrak{B}(\eta, N(D))$  (cf. la section IA). De plus, pour tout caractère  $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_D$ , où  $\eta$  est un caractère de conducteur  $p^n$ ,  $n > 0$ , et  $j \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j-h+1)p^{n(j+1)} \cdot \begin{cases} \exp^*\left(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z}\right) \otimes e_{\eta,-j}^{\text{dR},\vee} & \text{si } j \geq h, \\ \exp^{-1}\left(\int_\Gamma \eta\chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z}\right) \otimes e_{\eta,-j}^{\text{dR},\vee} & \text{si } j \ll 0, \end{cases}$$

De plus, si  $D$  est cristallin, l'application  $\Lambda_{D,z}$  provient par restriction d'une fonction rigide analytique définie sur tout l'espace des poids.

**Remarque I.16.** — L'application  $\text{Exp}^*$  étant  $\Lambda_\infty$ -linéaire, on a  $\mu_{\nabla_h z} = \nabla_h \mu_z$ .

— La preuve du théorème consiste de trois parties. Dans la section IC5, on calcule la constante  $N(D)$ , qui fournit l'ouvert de définition de  $\Lambda_{D,z}$ , et, dans les sections IC6 et IC7, on montre les propriétés d'interpolation. Notons que, si l'on définit  $\log$  comme  $\exp^{-1}$  ou  $\exp^*$  selon le cas, on obtient un énoncé d'interpolation uniforme pour tous les entiers  $j \in \mathbb{Z}$ .

**IC5. Calcul du rayon de convergence.** Si  $\eta$  est un caractère de conducteur  $p^m$ ,  $\kappa(x) = z_\kappa^{\log x/q}$  alors, pour que la formule (3) définissant l'application  $\Lambda_{D,z}(\eta\kappa)$  ait un sens, il suffit que  $\kappa(\partial)(1-\varphi)z \in \Delta^{[0,r_m]}$ . Ceci impose des conditions sur la valeur de  $N$  dans la définition de  $\kappa(\partial)$ , comme le montre le corollaire I.14. Le lemme suivant calcule, pour un  $\eta$  fixe, le rayon de convergence autour  $\eta$  de cette formule, ce qui décrit l'ouvert  $\mathfrak{U}_D$  de définition de l'application  $\Lambda_{D,z}$ .

**Lemme I.17.** Soient  $z \in \Delta^{\psi=1}$  et  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  un caractère de conducteur  $p^m$ ,  $m > m(\Delta)$ . Il existe une constante  $N(D) = C_p + m(\Delta)$ , où  $C_p$  est une constante qui ne dépend que de  $p$ , telle que la formule définissant  $\Lambda_{D,z}(\eta\kappa)$  est bien définie dès que  $v_p(z_\kappa - 1) > p^{N(D)-m}$ .

*Démonstration.* L'élément  $\kappa(\partial)(1-\varphi)z$  est défini comme somme des

$$g_j(\kappa) = \binom{\omega_\kappa}{j} \kappa(a)a^{-j}(1+T)^a p^{Nj} \varphi^N (\partial^j z_a),$$

22. cf. le lemme I.17 ci-dessous pour le calcul de la constante.

pour  $N$  assez grand. Ces éléments appartiennent<sup>23</sup> à  $\Delta^{[0, r_m]}$  si  $N < m - m(\Delta)$ . Prenons donc  $N = m - m(\Delta) - 1$ .

Soit  $N(D) = C_p + m(\Delta)$ , avec

$$C_p = -1/\log p - \log \log p + v_p(q) + \frac{1}{p-1} + 3,$$

et montrons que, si  $v_p(z_\kappa - 1) > p^{N(D)-m}$ , la somme définissant  $\kappa(\partial)(1 - \varphi)z$  converge.

Par la démonstration de la [proposition I.13](#), on a

$$v^{[r, r_m]}(g_j(\kappa)) \geq C + j \left( \frac{1}{j} v_p \left( \binom{\omega_\kappa}{j} \right) + N + C_\partial^{[p^N r, p^N r_m]} \right),$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas de  $j$  et  $C_\partial^{[p^N r, p^N r_m]} \geq -p^N r_m - 1 = -r_{m(\Delta)+1} - 1$ . On se ramène donc à montrer que

$$\frac{1}{j} v_p \left( \binom{\omega_\kappa}{j} \right) > m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 2.$$

On a

$$\omega_\kappa = \frac{\log \kappa(\exp(q))}{q} = \frac{\log z_\kappa}{q},$$

donc  $v_p(\omega_\kappa) = v_p(\log z_\kappa) - v_p(q) \geq \inf\{v_p(z_\kappa - 1)p^k - k\} - v_p(q)$ . On a deux cas :

- Si  $v_p(\omega_\kappa) \geq 0$ , alors la condition est automatiquement satisfaite dès que  $m > m(\Delta) + 3$ .
- Supposons que  $v_p(\omega_\kappa) < 0$ . On a  $v_p \left( \binom{\omega_\kappa}{j} \right) = j v_p(\omega_\kappa) - v_p(j!) \geq j(v_p(\omega_\kappa) - 1/(p-1))$ . Pour montrer l'inégalité ci-dessus, il suffit donc de montrer que

$$\inf_{k \geq 0} \{v_p(z_\kappa - 1)p^k - k\} > v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 2.$$

Ceci revient à montrer que, pour tout  $k \geq 0$ , on a

$$v_p(z_\kappa - 1)p^k - k > v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 2,$$

ou, de manière équivalente,

$$v_p(z_\kappa - 1) > p^{-k} \left( v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 2 + k \right) = p^{-k} (C + k).$$

La fonction d'une variable réelle  $f(x) = p^{-x}(C+x)$  atteint son maximum absolu en  $x = 1/\log p - C$ . On a donc

$$p^{-k} \left( v_p(q) + \frac{1}{p-1} + m(\Delta) - m + r_{m(\Delta)+1} + 2 + k \right) \leq p^{m(\Delta)+C_p-m},$$

ce qui permet de conclure. □

**Remarque I.18.** — Le lemme ci-dessus nous permet de décrire l'ouvert  $\mathfrak{U}_D \subseteq \mathfrak{X}$  de définition de  $\Lambda_{D,z}$  : il est une union de boules centrées sur les points  $\zeta_{p^m}$ ,  $m > m(\Delta)$ , de rayon  $p^{-p^{N(D)-m}}$  (qui tend vers 1 quand  $c(\eta) \rightarrow +\infty$ ).

23. Rappelons que, comme  $z \in \Delta^{\psi=1}$ , alors  $z \in \Delta^{[0, r_{m(\Delta)}]}$ , et donc  $\varphi^N(\partial^j z_a) \in \Delta^{[0, r_{m(\Delta)+N+1}]}$ .



— Si  $\zeta_{p^m}^b, \zeta_{p^m}^a, 1 \neq a, b \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ , sont deux racines primitives de l'unité (correspondant au choix de deux caractères d'ordre fini du même conducteur), alors

$$v_p(\zeta_{p^m}^b - \zeta_{p^m}^a) = v_p(\zeta_{p^m}^{b-a} - 1) = \frac{1}{p^{m-1-v_p(b-a)}(p-1)} = p^{v_p(b-a)}r_m.$$

On en déduit que les boules sont disjointes dès que  $v_p(b-a) < N(D)$ .

— Un entier  $j \in \mathbb{Z}, j \equiv 0 \pmod{p-1}$ , correspond au caractère  $\chi^j$  et  $z_j = z_{\chi^j} = (1+2p)^j$ .<sup>24</sup> On en déduit que  $v_p(z_j - 1) > p^{N-c(\eta)}$  si  $v_p(j) \geq p^{N-c(\eta)}$ . L'ouvert  $\mathfrak{B}(\eta, N)$  contient alors tous les caractères de la forme  $\eta\chi^j, v_p(j) \geq p^{N-c(\eta)}$ . En particulier, si  $N - c(\eta) < 0$ , il contient tous les caractères  $\eta\chi^j$ , avec  $(p-1)p \mid j$ .

**IC6.** *Interpolation des applications exponentielles duales.* On commence par quelques résultats préliminaires. On pourra comparer le lemme suivant avec [Berger 2003, Lemma II.1] (pour le cas cristallin et le caractère trivial).

**Lemme I.19.** *Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham,  $z \in \Delta^{\psi=1}$  et  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  un caractère de conducteur  $p^n$ ,  $n \geq m(\Delta)$  et  $m \geq 0$ . Alors :*

(i) *Si  $m(\Delta) \leq m < n$ , on a*

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a([\partial^j \varphi^{-m} z]_0) = 0,$$

(ii) *L'expression  $\sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(p^{-m} \text{Tr}_{L_m/L_n}[\partial^j \varphi^{-m} z]_0)$  ne dépend pas de  $m \geq n$ .*

*Démonstration.* Par définition de  $\Delta$ , on a  $\varphi^{-m}z \in L_m[[t]] \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  et  $p^{-k} \text{Tr}_{L_{m+k}/L_m} \varphi^{-(m+k)}z = \varphi^{-m}z$  car  $z$  est fixé par  $\psi$ , d'où  $\varphi^{-m}z$  peut être exprimé comme  $\sum_{h \geq 0} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})} (\zeta_{p^m}^b \otimes d_{h,b})t^h$ , avec  $d_{h,b} \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  (l'expression n'est évidemment pas unique).

Montrons le premier point. Il suffit, par linéarité, de montrer le résultat sous l'hypothèse que

$$[\partial^j \varphi^{-m} z]_0 = \zeta_{p^m}^b \otimes d, \quad \text{avec } 0 \leq b \leq p^m - 1, d \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D).$$

Or,

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(\zeta_{p^m}^b \otimes d) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\zeta_{p^m}^{ab} \otimes d = p^n \hat{\eta}(-b/p^m) \otimes d.$$

On en déduit le résultat en remarquant que  $\hat{\eta}$  est une fonction à support dans  $p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times$  et que  $v_p(-b/p^m) > -n$ .

En ce qui concerne le dernier point, on peut supposer par linéarité que  $\text{Tr}_{L_m/L_n}[\partial^j \varphi^{-m} z]_0 = \zeta_{p^n}^b \otimes d$ , où  $b \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$  et  $d \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ . On a

$$p^{-m} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a(\zeta_{p^n}^b \otimes d) = p^{-m} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\zeta_{p^n}^{ab} \otimes d = \hat{\eta}(-b/p^n) \otimes d = p^{-n}G(\eta)\eta^{-1}(b) \otimes d.$$

L'expression ci-dessus ne dépend pas de  $m$ , d'où le résultat. □

**Remarque I.20.** Si  $D$  est cristallin,  $z = \sum_k a_k T^k \in (\mathcal{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\text{cris}}(D))^{\psi=1} \subseteq (\Delta[1/t])^{\psi=1}$  et  $n = 0$  dans le lemme ci-dessus, on a, d'après [Berger 2003, Lemma II.1],

$$p^{-m} \text{Tr}_{L_m/L}[\varphi^{-m} z]_0 = (1 - p^{-1}\varphi^{-1})a_0.$$

<sup>24</sup>. On a posé  $z_{\chi^j} = (\exp q)^j$ , mais cela ne change rien si l'on choisit un autre générateur de  $1 + 2p\mathbb{Z}_p$ , comme par exemple  $1 + 2p$ .

**Lemme I.21.** Soient  $z \in D^{\psi=1}$ ,  $\eta$  un caractère constant modulo  $p^n$  avec  $n \geq m(\Delta)$  et  $m \geq n$ . On a alors l'égalité suivante dans  $L_m \otimes H_{\varphi, \gamma}^1(D(-j))$  :

$$\int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_z = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times} \eta(a) a^{-j} \int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \cdot \mu_{\sigma_a(z)}.$$

De plus, si  $D$  est de Rham, on a l'égalité (dans  $L_m \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(-j))$ )

$$\exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_z \right) \otimes e_{\eta}^{\text{dR}, \vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times} \eta(a) a^{-j} \exp_{D(-j)}^* \left( \int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \cdot \mu_{\sigma_a(z)} \right).$$

*Démonstration.* Montrons seulement le deuxième point, vu que les mêmes techniques seront utilisées plus tard. Par la proposition I.12 (appliquée à  $D(\eta \chi^{-j})$ ,  $j = 0$  et  $n = 0$ ), on a

$$\begin{aligned} \exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_z \right) &= p^{-m} \text{Tr}_{L_m/L}([\varphi^{-m}(z \otimes e_{\eta} \otimes e_{-j})]_0) \\ &= p^{-m} \text{Tr}_{L_m/L}(G(\eta)^{-1}[t^{-j} \varphi^{-m} z]_0) \otimes G(\eta) e_{\eta} \otimes t^j e_{-j}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que l'élément  $e_{\eta, -j}^{\text{dR}} = G(\eta) e_{\eta} \otimes t^j e_{-j}$  est fixé par  $\Gamma$  et commute donc à la trace. Notons que  $[t^{-j} \varphi^{-m} z]_0 = [\varphi^{-m} z]_j$ . La somme de Gauss s'écrit comme

$$G(\eta)^{-1} = p^{-n} \eta(-1) G(\eta^{-1}) = p^{-n} \eta(-1) \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta^{-1}(a) \zeta_{p^n}^a$$

et on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{L_m/L}(G(\eta)^{-1}[\varphi^{-m} z]_j) &= \eta(-1) p^{-n} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times} \eta(b) \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta^{-1}(ab) \zeta_{p^n}^{ab} \sigma_b[\varphi^{-m} z]_j \\ &= G(\eta)^{-1} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times} \eta(b) \sigma_b[\varphi^{-m} z]_j, \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule pour la trace et encore une fois la formule reliant  $G(\eta)$  et  $G(\eta^{-1})$ . On en déduit

$$\exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_z \right) = p^{-m} G(\eta)^{-1} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times} \eta(b) \sigma_b([\varphi^{-m} z]_j) \otimes G(\eta) e_{\eta} \otimes t^j e_{-j}.$$

Or  $\sigma_b[\varphi^{-m} z]_j = b^{-j} [\varphi^{-m} \sigma_b z]_j$  et, par la loi de réciprocité encore une fois (pour  $D$ ,  $j$  et  $m$ ), on sait que  $p^{-m} [\varphi^{-m} \sigma_b z]_j \otimes t^j e_{-j} = \exp^* \left( \int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \cdot \mu_{\sigma_b(z)} \right)$ , d'où

$$\exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_z \right) \otimes e_{\eta}^{\text{dR}, \vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})^\times} \eta(b) b^{-j} \exp^* \left( \int_{\Gamma_m} \chi^{-j} \mu_{\sigma_b(z)} \right),$$

ce qui permet de conclure. □

**Proposition I.22.** Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham,  $z \in \Delta^{\psi=1}$ ,  $h \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ ,  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  un caractère de conducteur  $p^n$ ,  $n \geq m(\Delta)$ , et  $j \geq h$  un entier. On a alors l'égalité suivante dans  $L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  :

$$\Delta_{D,z}(\eta \chi^j) = (-h + j)! p^{n(j+1)} \cdot \exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_h z} \right) \otimes e_{\eta, -j}^{\text{dR}, \vee}.$$

*Démonstration.* La preuve du [lemme I.21](#) appliqué à  $\nabla_{hz} \in D^{\psi=1}$  donne

$$\exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_{\nabla_{hz}} \right) \otimes e_{\eta, -j}^{\text{dR}, \vee} = G(\eta)^{-1} p^{-n} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) \sigma_a [\varphi^{-n} \nabla_{hz}]_j.$$

Or, on remarque que  $(\nabla - h + 1) \circ \dots \circ (\nabla - 1) \circ \nabla (\sum_{j \geq 0} a_j t^j) = \sum_{j \geq h} a_j j(j-1)(j-2) \dots (j-h+1) t^j$ . L'opérateur  $(\nabla - h + 1) \circ \dots \circ (\nabla - 1)$  a donc l'effet de tuer les coefficients plus petits que  $h - 1$ . Comme  $j \geq h$ , on a

$$[\varphi^{-n} \nabla_{hz}]_j = \frac{j!}{(j-h)!} [\varphi^{-n} z]_j = \frac{p^{-nj}}{(j-h)!} [\varphi^{-n} \partial^j z]_0.$$

Par ailleurs, en utilisant, respectivement, le [lemme I.19](#) et la définition de  $\Lambda_{D,z}$  (cf. la [section IC4, \(3\)](#)), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) \sigma_a [\varphi^{-n} \partial^j z]_0 &= \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) \sigma_a [\varphi^{-n} \partial^j z - p \varphi^{-(n-1)} \partial^j z]_0 \\ &= \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) \sigma_a [\varphi^{-n} \partial^j (1 - \varphi) z]_0 \\ &= G(\eta) \cdot \Lambda_{D,z}(\eta \chi^j), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

**IC7.** *Interpolation des applications exponentielles.* Des calculs du même genre montrent que

**Proposition I.23.** Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham,  $z \in \Delta^{\psi=1}$ ,  $h \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ ,  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  un caractère de conducteur  $p^n$  tel que  $n \geq m(\Delta)$  et  $j \geq -h + 1$  un entier tel que l'équation  $\partial^j z_j = z$  a une solution dans  $\Delta$  et tel que  $\exp_{D(j)} : \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(j)) \rightarrow H_{\varphi, \gamma}^1(D(j))$  soit un isomorphisme. On a alors l'égalité suivante dans  $L_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  :

$$\Lambda_{D,z}(\eta \chi^{-j}) = \Gamma^*(-h - j + 1) p^{n(-j+1)} \cdot \exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^j \cdot \mu_{\nabla_{hz}} \right) \otimes e_{\eta, j}^{\text{dR}, \vee}.$$

*Démonstration.* De la même façon que dans le [lemme I.21](#), on montre que

$$\exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^j \cdot \mu_{\nabla_{hz}} \right) \otimes e_{\eta}^{\text{dR}, \vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) a^j \exp^{-1} \left( \int_{\Gamma_n} \chi^j \cdot \mu_{\nabla_{h\sigma_a(z)}} \right).$$

Observons que, si  $\partial^j z_j = z$ , alors  $\partial^j (a^{-j} \sigma_a z_j) = \sigma_a z$ . En appliquant la loi de réciprocité ([théorème I.10](#)), on voit que l'expression ci-dessus est égale à

$$G(\eta)^{-1} \frac{p^{n(j-1)}}{\Gamma^*(-j - h + 1)} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) [\varphi^{-n}(\sigma_a z_j)]_0 \otimes t^{-j} e_j.$$

D'où

$$\Gamma^*(-h - j + 1) p^{n(-j+1)} \cdot \exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^j \cdot \mu_{\nabla_{hz}} \right) \otimes e_{\eta, j}^{\text{dR}, \vee} = G(\eta)^{-1} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^\times} \eta(a) [\varphi^{-n}(\sigma_a z_j)]_0.$$

Par le [lemme I.19](#) et par le fait que  $\partial$  est inversible sur  $\Delta^{\psi=0}$  et qu'on a donc le droit d'écrire  $(1 - p^{-j}\varphi)z_j = \partial^{-j}(1 - \varphi)z$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}(z_j)]_0 &= \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}((1 - p^{-j}\varphi)z_j)]_0 \\ &= \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} \eta(a)\sigma_a[\varphi^{-n}(\partial^{-j}(1 - \varphi)z)]_0 \\ &= G(\eta) \cdot \Lambda_{D,z}(\eta\chi^{-j}), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Ceci finit la preuve du [théorème I.15](#).

**IC8.** *Le cas des poids de Hodge–Tate positifs.* Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham à poids de Hodge–Tate positifs et notons toujours  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ . Fixons un entier  $h$  tel que  $\text{Fil}^{-h} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ . On a donc  $D \subseteq \Delta$  et, si  $z \in D^{\psi=1}$ , on peut appliquer la construction faite ci-dessus à l'élément  $z$  (et  $h$ ) pour obtenir une application  $\Lambda_{D,z}$ . On commence avec quelques remarques.

**Lemme I.24.** *Soient  $z \in D^{\psi=1}$ ,  $\eta : \Gamma \rightarrow L^\times$  un caractère localement analytique et  $j \in \mathbb{Z}$ . On a*

$$\int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z} = (-\omega_\eta - j - h + 1)(-\omega_\eta - j - h + 2) \cdots (-\omega_\eta - j) \int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_z.$$

En particulier, si  $\eta$  est localement constant, on a

$$\int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_{\nabla_h z} = (-j - h + 1)(-j - h + 2) \cdots (-j) \int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_z.$$

*Démonstration.* Si  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ , par définition de l'action de  $\Gamma$  sur  $D^{\psi=1}$ , on a

$$\int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \sigma_a \mu_z = \eta(a)^{-1} a^{-j} \int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_z,$$

et, si  $i \in \mathbb{Z}$ , la formule  $\nabla = \lim_{a \rightarrow 1} (\sigma_a - 1)/(a - 1)$  donne

$$\int_{\Gamma} \eta\chi^j (\nabla - i) \cdot \mu_z = \left( \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\eta(a)^{-1} a^{-j} - 1}{a - 1} - i \right) \int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_z = (-\eta'(1) - j - i) \int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_z,$$

ce qui permet de conclure car  $\nabla_h = (\nabla - h + 1) \circ \cdots \circ (\nabla - 1) \circ \nabla$ . □

**Lemme I.25.** *Soient  $z \in D^{\psi=1}$ ,  $\eta$  un caractère de Dirichlet de conducteur  $p^n$  et  $j \geq 0$  assez grand.<sup>25</sup> Alors*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^{-j}) = \Gamma^*(-j + 1)p^{n(-j+1)} \cdot \exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta\chi^j \cdot \mu_z \right) \otimes \mathbf{e}_{\eta,j}^{\text{dR},\nabla}.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la [proposition I.23](#) et du [lemme I.24](#) ci-dessus. □

**Lemme I.26.** *Soient  $z \in D^{\psi=1}$ ,  $\eta$  et  $j \geq 0$  comme dans la [proposition I.22](#). Alors*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j + 1)p^{n(j+1)} \cdot \exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z \right) \otimes \mathbf{e}_{\eta,-j}^{\text{dR},\nabla}.$$

25. Il suffit que  $j$  soit plus grand que le plus grand poids de Hodge–Tate et assez grand de sorte que  $\exp_{D(j)}$  soit bijective.

*Démonstration.* Si l'on part de  $z \in D^{\psi=1}$ , les calculs faits dans la preuve de la [proposition I.22](#) marchent en posant  $h = 0$  et donnent exactement le résultat cherché.  $\square$

En notant, comme précédemment, par  $\log$  l'application  $\exp^{-1}$  ou  $\exp^*$  selon le cas, on peut résumer ces résultats dans la forme énoncée au début de du chapitre :

**Théorème I.27.** *Soient  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  de Rham à poids de Hodge–Tate positifs et  $z \in D^{\psi=1}$ . Il existe une fonction rigide analytique  $\Lambda_{D,z} \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_D) \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  telle que, si  $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_D$ , où  $\eta$  est un caractère de conducteur  $p^n$  et  $j \in \mathbb{Z}$  est tel que  $j \geq 0$  ou  $j \ll 0$ , alors*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \Gamma^*(j+1)p^{n(j+1)} \cdot \log\left(\int_{\Gamma} \eta\chi^{-j} \cdot \mu_z\right) \otimes e_{\eta,-j}^{\text{dR},\vee}.$$

**IC9.** *Le cas cristallin.* Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  cristallin de rang  $d$ . Supposons que les pentes de  $\varphi$  sur  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(D)$  sont  $< 0$ . On a  $\Delta \cong \mathcal{R} \otimes \mathbf{D}_{\text{cris}}(D)$  (cf. [\[Nakamura 2014, Lemma 3.16\]](#)) et, si  $z \in \Delta^{\psi=1}$ , alors  $z \in \mathcal{R}^+ \otimes \mathbf{D}_{\text{cris}}(D)$  (cf. [\[Berger et Breuil 2010, proposition 2.5.2\]](#)). Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in L$  les valeurs propres de  $\varphi$  et choisissons une base  $e_i, 1 \leq i \leq d$ , de  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(D)$  telle que  $\varphi(e_i) = \alpha_i e_i$  pour tout  $i$ . On peut alors écrire

$$z = \sum_{i=1}^d \mathcal{A}_{\lambda_i} \otimes e_i$$

pour certaines distributions  $\lambda_i \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}_p, L)$  vérifiant  $\psi(\lambda_i) = \alpha_i \lambda_i, 1 \leq i \leq d$ . Quelques calculs classiques nous permettent de montrer le résultat suivant :

**Proposition I.28.** *Soient  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  un caractère de conducteur  $p^n, n > 0$ , et  $j > 0$ . On a alors*

$$\Lambda_{D,z}(\eta\chi^j) = \sum_{i=1}^d \left( \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \eta^{-1} x^j \cdot \lambda_i \right) \otimes \alpha_i^{-n} e_i.$$

En regardant le terme de droite de cette proposition, on en déduit :

**Corollaire I.29.** *Soit  $D \in \Phi\Gamma(\mathcal{R})$  cristallin, alors la fonction  $\Lambda_{D,z}$  provient par restriction d'une fonction définie sur tout l'espace des poids.*

**ID. Équation fonctionnelle en dimension 2.** Dans cette section, nous utilisons le résultat principal de [\[Rodrigues Jacinto 2018\]](#) (où on pourra trouver une exposition plus détaillée des résultats ainsi que ses preuves) pour en déduire une équation fonctionnelle satisfaite par la fonction  $L$  locale quand le  $(\varphi, \Gamma)$ -module est de dimension 2, de Rham et non triangulin. On commence par fixer un certain nombre de notations.

**ID1. Notations.** Soit  $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{R})$  de dimension 2, de Rham à poids de Hodge–Tate 0 et  $k$  que l'on suppose non triangulin<sup>26</sup> et notons  $\Delta = \mathbb{N}_{\text{rig}}(D)$ , qui est à poids de Hodge–Tate tous nuls.

Étendons un peu les notations de la [section IC3](#). Si  $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère, on note  $e_\delta$  une base du module  $L(\delta)$  muni d'actions de  $\varphi$  et  $\Gamma$  via les formules  $\varphi(e_\delta) = \delta(p) \cdot e_\delta$  et  $\sigma_a(e_\delta) = \delta(a) \cdot e_\delta, a \in \mathbb{Z}_p^\times$ . On note  $D(\delta) = D \otimes \delta$  le module  $D \otimes_L L(\delta)$ . Le choix de  $e_\delta$  fournit un isomorphisme de  $L$ -espaces vectoriels  $D \xrightarrow{\sim} D(\delta), x \mapsto x \otimes e_\delta$ .

26. D'après Kedlaya, tout  $(\varphi, \Gamma)$  module sur  $\mathcal{R}$  est étale à torsion près par un caractère ou triangulin. Dans ce dernier cas les calculs qui suivent sont déjà connus et l'hypothèse de non triangularité n'est donc pas vraiment restrictive.

Soit  $\check{D} = \text{Hom}_{\varphi, \Gamma}(D, \mathcal{R} \frac{dT}{1+T})$  le dual de Tate de  $D$ , où  $\mathcal{R} \frac{dT}{1+T}$  est le  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale libre de rang 1 de base  $\frac{dT}{1+T}$  sur lequel  $\varphi$  et  $\Gamma$  agissent par les formules  $\gamma(\frac{dT}{1+T}) = \chi(\gamma) \frac{dT}{1+T}$  si  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\varphi(\frac{dT}{1+T}) = \frac{dT}{1+T}$ . On note

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \check{D}_{\text{rig}} \times D_{\text{rig}} \rightarrow \mathcal{R} \frac{dT}{1+T}$$

l'accouplement naturel. Soient  $\omega_D = (\det_D)\chi^{-1}$  et  $\omega_\Delta = (\det_\Delta)\chi^{-1}$ . Le fait que  $D$  soit de dimension 2 nous permet d'identifier  $\check{D} = D \otimes \omega_D^{-1}$ . Comme les poids de Hodge–Tate de  $D$  sont 0 et  $k$ , et ceux de  $\Delta$  sont nuls, le caractère  $\det_\Delta$  est localement constant et  $\omega_D = \omega_\Delta x^k$  (et  $\det_D = x^k \det_\Delta$ ). Notons  $e_D = e_{\det_D}$ .

Soit  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère localement constant, vu comme un caractère de  $\mathbb{Q}_p^\times$  en posant  $\eta(p) = 1$ . Rappelons que l'on a un générateur  $e_\eta^{\text{dR}} = G(\eta)e_\eta$  du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta))$ , que  $e_\eta^\vee = e_{\eta^{-1}}$  dénote la base de  $L(\eta)^*$  duale de  $e_\eta$ , et que  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta)^*) = L \cdot G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee = L \cdot G(\eta^{-1})e_{\eta^{-1}}$ . Ceci fournit deux bases  $e_\eta^{\text{dR}, \vee} = G(\eta)^{-1}e_\eta^\vee$  et  $e_{\eta^{-1}}^{\text{dR}} = G(\eta^{-1})e_{\eta^{-1}}$  du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta)^*) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta^{-1}))$ , reliées par la formule  $p^n \eta(-1)e_\eta^{\text{dR}, \vee} = e_{\eta^{-1}}^{\text{dR}}$ .

On aura besoin de jongler un peu avec des éléments habitant dans le module de de Rham des différents tordus de  $D$  et de son dual de Tate et les identifications suivantes permettent de voir tous ces éléments dans  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$ . Fixons une base  $f_1, f_2$  de  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  et notons

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{dR}} : \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \times \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) \rightarrow L,$$

le produit scalaire défini par la formule  $\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, b_1 f_1 + b_2 f_2 \rangle_{\text{dR}} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ .

L'isomorphisme  $\wedge^2 D = (\mathcal{R} \frac{dT}{1+T}) \otimes \omega_D$  induit un isomorphisme  $\wedge^2 \mathbf{D}_{\text{dR}}(D) = \mathbf{D}_{\text{dR}}((\mathcal{R} \frac{dT}{1+T}) \otimes \omega_D) = (t^{-k} L_\infty e_D)^\Gamma$ . On définit  $\Omega \in L_\infty$  par la formule  $f_1 \wedge f_2 = (t^k \Omega)^{-1} e_D$ , ce qui nous permet de fixer les bases  $(t^k \Omega)^{-1} e_D$  et  $t^k \Omega e_D^\vee$  du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\wedge^2 D)$  et de son dual. On fixe aussi les bases  $e_{\omega_D}^{\text{dR}} = (t^{k-1} \Omega)^{-1} e_{\omega_D}$  et  $e_{\omega_D}^{\text{dR}, \vee} = (t^{k-1} \Omega) e_{\omega_D}^\vee$  du module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\omega_D))$  et de son dual.

Enfin, afin d'alléger les notations dans les calculs futurs, notons, pour  $\eta$  comme ci-dessus et  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$e_{\eta, j, \omega_D^\vee} := e_\eta \otimes e_j \otimes e_{\omega_D}^\vee, \quad e_{\eta, j} := e_\eta \otimes e_j,$$

bases de  $L(\eta \chi^j \omega_D^{-1})$  et  $L(\eta \chi^j)$  respectivement, et leurs duales

$$e_{\eta, j, \omega_D^\vee}^\vee := e_\eta^\vee \otimes e_{-j} \otimes e_{\omega_D}, \quad e_{\eta, j}^\vee := e_\eta^\vee \otimes e_{-j},$$

ainsi que des bases des module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta \chi^j \omega_D^{-1}))$  et  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(\mathcal{R}(\eta \chi^j))$

$$e_{\eta, j, \omega_D^\vee}^{\text{dR}} := G(\eta) e_\eta \otimes t^{-j} e_j \otimes t^{k-1} \Omega e_{\omega_D}^\vee = e_\eta^{\text{dR}} \otimes e_j^{\text{dR}} \otimes e_{\omega_D}^{\text{dR}, \vee},$$

$$e_{\eta, j}^{\text{dR}} := G(\eta) e_\eta \otimes t^{-j} e_j = e_\eta^{\text{dR}} \otimes e_j^{\text{dR}}$$

et leurs duales

$$e_{\eta, j, \omega_D^\vee}^{\text{dR}, \vee} := G(\eta)^{-1} e_\eta^\vee \otimes t^j e_{-j} \otimes (t^{k-1} \Omega)^{-1} e_{\omega_D} = e_\eta^{\text{dR}, \vee} \otimes e_{-j}^{\text{dR}} \otimes e_{\omega_D}^{\text{dR}},$$

$$e_{\eta, j}^{\text{dR}, \vee} := G(\eta)^{-1} e_\eta^\vee \otimes t^j e_{-j} = e_\eta^{\text{dR}, \vee} \otimes e_{-j}^{\text{dR}},$$

et les variantes évidentes que l'on puisse imaginer.

Par exemple, si  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère d'ordre fini, si  $j \geq 0$  et si  $x \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(\check{D}(\eta\chi^{-j}))$ , on écrira  $x \otimes e_{\eta, -j, \omega_D^\vee}^{\text{dR}, \vee} \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  l'image de  $x$  par l'isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\text{dR}}(\check{D}(\eta\chi^{-j})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D), \quad x \mapsto x \otimes G(\eta)^{-1} e_\eta^\vee \otimes t^{-j} e_j \otimes (t^{k-1} \Omega)^{-1} e_{\omega_D}$$

et de même, si  $x \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(\eta^{-1}\chi^j))$ , on notera  $x \otimes e_{\eta^{-1}, j}^{\text{dR}, \vee} \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  l'image de  $x$  par l'isomorphisme

$$\mathbf{D}_{\text{dR}}(D(\eta^{-1}\chi^j)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\text{dR}}(D), \quad x \mapsto x \otimes G(\eta^{-1})^{-1} e_{\eta^{-1}}^\vee \otimes t^j e_{-j}.$$

**Remarque I.30.** — Les bases des modules de de Rham ainsi définies héritent une action de l'opérateur  $\varphi$ . On a, par exemple,

$$\begin{aligned} \varphi(e_\eta^{\text{dR}}) &= e_\eta^{\text{dR}}, & \varphi(e_j^{\text{dR}}) &= p^{-j} e_j^{\text{dR}}, \\ \varphi(e_{\eta, j, \omega_D^\vee}^{\text{dR}}) &= p^{-j+k-1} \omega_D^{-1}(p) \cdot e_{\eta, j, \omega_D^\vee}^{\text{dR}} = p^{-j-1} \omega_\Delta^{-1}(p) \cdot e_{\eta, j, \omega_D^\vee}^{\text{dR}}. \end{aligned}$$

— Il faut faire un peu d'attention et distinguer le caractère identité  $x$  et le caractère cyclotomique  $\chi = x|x|$ . Les deux coïncident sur  $\mathbb{Z}_p^\times$  mais  $\chi(p) = 1$ , tandis que le premier prend la valeur  $p$ . Par exemple,  $\Gamma$  agit trivialement sur l'élément  $e_j \otimes e_{x^j}^\vee$  mais  $\varphi(e_j \otimes e_{x^j}^\vee) = p^{-j} e_j \otimes e_{x^j}^\vee$ .

**ID2. Facteurs epsilon pour  $GL_1$ .** Commençons par rappeler la définition des facteurs locaux associés à un caractère. Soit  $\eta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$  un caractère continu. On dit que  $\eta$  est non ramifié si sa restriction à  $\mathbb{Z}_p^\times$  est triviale et il est ramifié dans le cas contraire. On définit son conducteur par 0 s'il est non ramifié, et par  $p^n$ , où  $n$  est le plus petit entier tel que la restriction  $\eta|_{1+p^n\mathbb{Z}_p}$  soit triviale, dans le cas contraire. Notons (cf. [Bushnell et Henniart 2006, §6.23 ; Schmidt 2002, §1.1])

$$\varepsilon(\eta, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta \text{ n'est pas ramifié,} \\ p^{-ns} \eta(p)^n G(\eta^{-1}) & \text{si } \eta \text{ est ramifié} \end{cases}$$

le facteur epsilon associé au caractère  $\eta$ . Il satisfait l'équation fonctionnelle

$$\varepsilon(\eta, s) \varepsilon(\eta^{-1}, 1-s) = \eta(-1).$$

On notera dans la suite  $\varepsilon(\eta) := \varepsilon(\eta, \frac{1}{2}) = p^{-n/2} \eta(p)^n G(\eta^{-1})$ .

**ID3. Facteurs epsilon pour  $GL_2$ .** Soit  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et notons  $\check{\pi}$  sa contragrédiente. On note (cf. [Bushnell et Henniart 2006, §6])  $\varepsilon(\pi) \in L$  le facteur epsilon de la représentation  $\pi$ , ainsi que  $\varepsilon(\pi, s) = p^{-c(\pi)(s-\frac{1}{2})} \varepsilon(\pi)$ , où  $c(\pi)$  est le conducteur de  $\pi$ .<sup>27</sup> Observons que, si  $j \in \mathbb{Z}$ , alors  $\varepsilon(\pi, j + \frac{1}{2}) = p^{-c(\pi)j} \varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi \otimes |\cdot|^j)$ .<sup>28</sup> Le facteur epsilon satisfait une équation fonctionnelle

$$\varepsilon(\pi, s) \varepsilon(\check{\pi}, 1-s) = \omega_\pi(-1),$$

où  $\omega_\pi$  est le caractère central de la représentation  $\pi$ .

27. Le conducteur  $c(\pi)$  est défini comme le plus petit entier  $n$  tel que  $\pi$  possède un élément fixe par les matrices de la forme  $K_n = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p) : c = d - 1 = 0 \pmod{p^n} \}$ . On a  $\dim_L \pi^{K_n} = 1$ .

28. On note  $|\cdot|^j := |\det(\cdot)|^j$  le caractère non ramifié de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  envoyant  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  vers  $|ad - bc|^j$ .

**ID4.** *Une équation fonctionnelle locale.* Soit  $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{R})$  étale de dimension 2, de Rham non triangulin à poids de Hodge–Tate 0 et  $k \geq 0$ . Soit  $\omega_D = \det_D \chi^{-1}$  de sorte que  $\check{D} = D \otimes \omega_D^{-1}$ . Rappelons que la correspondance de Langlands permet (cf. [Colmez 2010, proposition V.2.1 ; Colmez et Dospinescu 2014, remarque V.14 ; Rodrigues Jacinto 2018, §2.5]) de construire une involution

$$w_D : D^{\psi=1} \rightarrow \check{D}^{\psi=1}.$$

Plus précisément, notre ( $\varphi, \Gamma$ )-module  $D$  peut être vu comme un faisceau  $(\mathbb{Z}_p^{-\{0\}} \mathbb{Z}_p^1)$ -équivariant<sup>29</sup>  $U \mapsto D \boxtimes U$  sur  $\mathbb{Z}_p$  dont les sections globales sont données par  $D \boxtimes \mathbb{Z}_p = D$  et la construction (cf. [Colmez 2010]) de la représentation  $\Pi(D)$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  associée à  $D$  par la correspondance de Langlands  $p$ -adique est fondée sur l’extension de ce faisceaux en un faisceau  $G$ -équivariant  $U \mapsto D \boxtimes U$  sur  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ . On a un accouplement parfait et  $G$ -équivariant  $[ \ , \ ]_{\mathbb{P}^1}$  sur  $D \boxtimes \mathbb{P}^1$  et la suite exacte fondamentale de  $G$ -modules suivante :

$$0 \rightarrow \Pi(D)^* \otimes \omega_D \rightarrow D \boxtimes \mathbb{P}^1 \rightarrow \Pi(D) \rightarrow 0.$$

De plus, en notant  $u = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on a un isomorphisme

$$\text{Res}_{\mathbb{Z}_p} : (\Pi(D)^* \otimes \omega_D)^{u=1} \xrightarrow{\sim} D^{\psi=1}.$$

Si  $z \in D^{\psi=1}$ , on note  $\tilde{z}$  l’image inverse de  $z$  par cet isomorphisme. En notant  $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , l’élément  $w \cdot \tilde{z}$  appartient donc à  $(\Pi(D)^* \otimes \omega_D)^{u=\omega_D(p)}$ . On pose alors

$$w_D(z) := \text{Res}_{\mathbb{Z}_p}(w_D(\tilde{z})) \otimes e_{\omega_D}^{\vee} \in \check{D}^{\psi=1}.$$

L’équation fonctionnelle suivante est le résultat principal de [Rodrigues Jacinto 2018].

**Théorème I.31.** *Soit  $z \in D^{\psi=1}$  et notons  $\check{z} = w_D(z) \in \check{D}^{\psi=1}$ . On a*

$$\exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta \chi^{-j} \cdot \mu_{\check{z}} \right) \otimes e_{\eta, -j, \omega_D}^{\text{dR}, \vee} = C(D, \eta, j) \cdot \exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta^{-1} \chi^j \cdot \mu_z \right) \otimes e_{\eta^{-1}, j}^{\text{dR}, \vee},$$

où

$$C(D, \eta, j) = -\Omega^{-1} \frac{\Gamma^*(-j+1)}{\Gamma^*(j+k)} \varepsilon(\eta^{-1})^{-2} \varepsilon(\pi \otimes \eta^{-1} \otimes | \cdot |^j)$$

pour tout  $j \geq 1$ , où  $\pi$  dénote la représentation lisse de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  associée à (la représentation galoisienne associée à)  $D$  par la correspondance de Langlands classique.

**ID5.** *Équation fonctionnelle de la fonction  $L$  locale.* Le **théorème I.31** nous permet de montrer une équation fonctionnelle pour la fonction  $\Lambda_{D,z}$ .

**Théorème I.32.** *Soit  $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{R})$  étale de dimension 2, de Rham à poids de Hodge–Tate 0 et  $k \geq 0$ . Soient  $z \in D^{\psi=1}$  et  $\check{z} = w_D(z) \in \check{D}^{\psi=1}$ . Soit  $\eta : \mathbb{Z}_p^{\times} \rightarrow L^{\times}$  un caractère de conducteur  $p^n$  avec  $n \geq m(\Delta)$ . Soient  $\mathfrak{U}_{\Delta} \subseteq \mathfrak{X}$  l’ouvert fourni par le **théorème I.15** et  $\kappa$  tel que  $\eta\kappa \in \mathfrak{U}_{\Delta}$ . Alors*

$$\begin{aligned} \Lambda_{\check{D}^{(k-1), \check{z}^{(k-1)}}}(\eta\chi^j) \otimes e_{k-1, \omega_D}^{\text{dR}, \vee} \\ = -\Omega^{-1} p^{n(k-1)} \varepsilon(\eta^{-1} \otimes | \cdot |^{j-k+1})^{-2} \varepsilon(\pi \otimes \eta^{-1} \otimes | \cdot |^{j-k+1}) \cdot \Lambda_{D,z}(\eta^{-1} \chi^{-j+k-1}). \end{aligned}$$

29. L’action de  $\varphi, \sigma_a$  et la multiplication par  $(1+T)^b, a \in \mathbb{Z}_p^{\times}, b \in \mathbb{Z}_p$ , correspondant à  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  respectivement.



*Démonstration.* Par le [théorème I.27](#), on sait que

$$\Lambda_{\check{D}(k-1), \check{z}(k-1)}(\eta\chi^j) \otimes e_{k-1, \omega_D^\vee}^{\text{dR}, \vee} = \Gamma^*(j+1) p^{n(j+1)} \cdot \exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta\chi^{-j+k-1} \cdot \mu_{\check{z}} \right) \otimes e_{\eta, -j+k-1, \omega_D^\vee}^{\text{dR}, \vee}.$$

L'équation fonctionnelle du [théorème I.31](#) nous dit que

$$\exp^* \left( \int_{\Gamma} \eta\chi^{-j+k-1} \cdot \mu_{\check{z}} \right) \otimes e_{\eta, -j+k-1, \omega_D^\vee}^{\text{dR}, \vee} = C(D, \eta, j-k+1) \cdot \exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta^{-1}\chi^{j-k+1} \cdot \mu_z \right) \otimes e_{\eta^{-1}, j-k+1}^{\text{dR}, \vee}.$$

Finalement, en appliquant encore une fois le [théorème I.27](#), on obtient

$$\exp^{-1} \left( \int_{\Gamma} \eta^{-1}\chi^{j-k+1} \cdot \mu_z \right) \otimes e_{\eta^{-1}, j-k+1}^{\text{dR}, \vee} = (\Gamma^*(-j+k) p^{n(-j+k)})^{-1} \cdot \Lambda_{D, z}(\eta^{-1}\chi^{-j+k-1}).$$

Ces trois équations et un petit calcul permettent de conclure. □

## II. Fonction $L$ $p$ -adique d'une forme modulaire

Pour terminer, on applique les résultats obtenus à la représentation associée à une forme modulaire et au système d'Euler de Kato pour obtenir une construction (partielle) de la fonction  $L$   $p$ -adique de la forme modulaire en question.

Soit

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f) \otimes \mathbb{C}$$

une forme primitive (cuspidale, propre pour les opérateurs de Hecke, nouvelle et normalisée) de poids  $k \geq 2$ , niveau  $N$  et caractère  $\omega_f : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Les opérateurs de Hecke  $T_n$  agissent sur  $f$  par  $T_n f = a_n f$ . On note  $F = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots)$  le corps de nombres engendré par les coefficients de  $f$  et  $\check{f} = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{a}_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N), \omega_f^{-1}) \otimes \mathbb{C}$  la forme conjuguée à  $f$ . On note

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, s) = \frac{\Gamma(s)}{(2i\pi)^s} L(f, \eta^{-1}, s)$$

la normalisation de la fonction  $L$  complexe de la forme  $f$ . Soit  $v$  une place de  $F$  au-dessus de  $p$  et soit  $L = F_v$ . Notons  $V(f) \in \text{Rep}_L \mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$  la représentation galoisienne de dimension 2 attachée à  $f$  [[Kato 2004](#), §6.3] et  $D = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V(f)|_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}})(k-1) \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{R})$ , qui est de Rham à poids de Hodge–Tate 0 et  $k-1$ .

En appliquant une version  $p$ -adique de la conjecture de Bloch–Kato, on construit (cf. la [section IIB](#)), pour tout  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L$  (que l'on voit comme un caractère de Dirichlet de conducteur une puissance de  $p$ ) et tout  $j \geq 0$ , un plongement  $p$ -adique naturel

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j) \mapsto \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)) \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$$

des valeurs spéciales aux entiers négatifs de la fonction  $L$  complexe (normalisée) de la forme modulaire. Rappelons que, dans la bande critique  $1 \leq j \leq k-1$ , les valeurs  $\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j)$  sont naturellement interprétés (cf., par exemple, [[Kato 2004](#), Theorem 16.2])  $p$ -adiquement en les multipliant par les périodes complexes de la forme  $f$ . Le théorème final (annoncé dans l'introduction) de ce texte peut être énoncé sous la forme suivante :

**Théorème II.1.** *Il existe un ouvert  $\mathfrak{U}_f \subseteq \mathfrak{X}$ , ne dépendant que de l'extension sur laquelle la représentation galoisienne associée à  $f$  dévient semi-stable, et contenant tous les caractères d'ordre fini assez ramifiés, et une fonction rigide analytique  $L_p(f) \in \mathcal{O}(\mathfrak{U}_f) \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(D)$  telle que, si  $\eta\chi^j \in \mathfrak{U}_f$ , où  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  est un caractère de conducteur  $p^n$  et  $j \in \mathbb{Z}$  est tel que  $0 \leq j \leq k - 2$  ou  $j \ll 0$ , alors*

$$L_p(f)(\eta\chi^j) = p^{n(j+1)} G(\eta)^{-1} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j + 1)).$$

De plus, la fonction  $L_p(f)$  satisfait une équation fonctionnelle de la forme

$$L_p(f)(\eta\chi^j) = C(f, \eta, j) \cdot L_p(\check{f})(\eta^{-1}\chi^{-j+k-2}) \otimes e_{k-1, \omega_D^{-1}}^{\text{dR}, \vee},$$

où

$$C(f, \eta, j) = \Omega p^n \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-l+(k-1)/2})^2 \varepsilon(\pi_p(\check{f}) \otimes \eta \otimes |\cdot|^{-j+k-1})^{-1} \cdot \prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_\ell(\check{f}) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{-j+(k-1)/2})^{-1}.$$

Finalemment, si  $p \nmid N$ ,<sup>30</sup>  $\alpha$  est une valeur propre du polynôme de Hecke de  $p$  de  $f$  et  $e_\alpha \in \mathbf{D}_{\text{cris}}(V(f)) = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)^*$  est un vecteur propre du Frobenius cristallin de valeur propre  $\alpha$ , alors  $\mathfrak{U}_f = \mathfrak{X}$  et on a

$$L_{p, \alpha}(f) = \langle L_p(f), e_\alpha \rangle.$$

**Remarque II.2.** — Si  $N = N' p^r$ ,  $(N, N') = 1$ , on devrait pouvoir trouver un lien entre l'exposant  $r$  et le discriminant de l'extension  $K$  sur laquelle la  $L$ -représentation  $V_L(f)$  dévient semi-stable, c'est-à-dire, entre  $r$  et le rayon de surconvergence de l'équation différentielle  $p$ -adique associée à  $V(f)$ . L'ouvert du théorème ne devrait donc dépendre que de  $r$ .

— La dernière affirmation suit de la construction de Kato de la fonction  $L$   $p$ -adique de  $f$  en utilisant le logarithme de Perrin-Riou, et du fait que la construction menée dans ce travail est une généralisation directe de celui-ci.

## IIA. Notations et compléments.

**IIA1. Conjecture de Bloch–Kato pour les formes modulaires.** Soit  $Y_1(N)$  la courbe modulaire de niveau  $\Gamma_1(N)$  et notons  $\mathcal{KS}_{\Gamma_1(N)}^{k-2}$  la  $k - 2$ -ième variété de Kuga–Sato de niveau  $\Gamma_1(N)$  et  $\varepsilon$  l'idempotent usuel (cf. [Kato 2004, §1.1, §11.1] ou [Scholl 1990]). Soit  $M = M(f \otimes \eta^{-1})$  le motif associé à la forme  $f \otimes \eta^{-1}$  (cf. [Gealy 2006; Scholl 1990]) et considérons

$$M^*(1 + j) = M(\check{f} \otimes \eta)(k + j),$$

dont  $V(\eta\chi^{j+1})$  est la réalisation  $p$ -adique.

Notons  $T$  l'algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke de niveau premier à  $N$  et  $\bar{\lambda} : T \rightarrow L$  le caractère associé à  $\check{f} \otimes \eta$ . On a une description (cf. [Scholl 1990; Deninger et Scholl 1991; Gealy 2006])

$$\begin{aligned} H^1(M^*(1 + j)) &= H_{\mathscr{H}}^k(\mathcal{KS}_{\Gamma_1(N)}^{k-2}, k + j)(\varepsilon) \otimes_T \bar{\lambda}, \\ H_{\mathscr{D}}^1(M^*(1 + j)) &= H_{\mathscr{D}}^k(\mathcal{KS}_{\Gamma_1(N)}^{k-2}, \mathbb{R}(k + j))(\varepsilon) \otimes_T \bar{\lambda}, \\ H_{\text{ét}}^1(M^*(1 + j)) &= H^1(\mathbb{Q}, H_{\text{ét}}^{k-1}(\mathcal{KS}_{\Gamma_1(N), \bar{\mathbb{Q}}}^{k-2}, \mathbb{Q}_p)(k + j)(\varepsilon) \otimes_T \bar{\lambda}), \end{aligned}$$

30. Plus généralement, si la représentation associée à  $f$  est cristabéline.

des groupes de cohomologie motivique, de Deligne et étale, respectivement, du motif  $M^*(1 + j)$ , ainsi que des régulateurs

$$\begin{aligned} r_\infty &: H^1(M^*(1 + j)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow H^1_{\mathcal{D}}(M^*(1 + j)), \\ r_{\text{ét}} &: H^1(M^*(1 + j)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \rightarrow H^1_{\text{ét}}(M^*(1 + j)). \end{aligned}$$

En utilisant les symboles d'Eisenstein définis par Beilinson [1986], on construit, pour  $1 \leq r \leq k - 1$ , des éléments (cf. [Gealy 2003, §3.2], où les éléments sont notés  $\bar{\xi}_r$ )

$$\mathcal{Z}(k, j, r) \in H^k_{\mathcal{M}}(\mathcal{KS}_{\Gamma_1(N)}^{k-2}, k + j)(\varepsilon).$$

Si  $\xi \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , on pose

$$\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, r, \xi) = \xi^*(\mathcal{Z}(k, j, r)) \otimes_T \bar{\lambda} \in H^1(M^*(1 + j)).$$

Enfin, on sait [Kato 2004, Theorem 13.6] que les symboles modulaires  $\delta(\check{f} \otimes \eta, r, \xi) \in V_F(\check{f} \otimes \eta)$ ,  $1 \leq r \leq k - 1$ ,  $\xi \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  engendrent  $V_F(\check{f} \otimes \eta)$  sur  $F$ , ce qui nous permet, en prenant des combinaisons linéaires des éléments  $\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, r, \xi)$ , de définir, pour tout  $\gamma \in V_F(\check{f})$ ,

$$\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, \gamma) \in H^1(M^*(1 + j)).$$

**Proposition II.3** [Gealy 2006, Theorem 4.1.1]. *Soit  $\gamma \in V_F(\check{f})$ . Alors*

$$r_\infty(\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, \gamma)) = L^{(N),*}(f, \eta^{-1}, -j) \cdot \gamma,$$

où  $L^{(N),*}(f, \eta^{-1}, -j)$  dénote le coefficient principal de la série de Taylor en  $s = -j$  de la fonction  $L$  de  $f$  sans ses facteurs en les places divisant  $N$ .

**IIA2. Cohomologie syntomique.** Les groupes de cohomologie syntomique  $H^k_{\text{syn}}(X_h, r)$  d'un schéma séparé de type fini  $X$  sur un corps  $p$ -adique, ainsi que des morphismes de périodes syntomiques

$$\rho_{\text{syn}} : \mathbb{R}\Gamma_{\text{syn}}(X_h, r) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\text{ét}}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_p(r)),$$

et des morphismes de réalisation  $p$ -adiques (ou syntomiques)

$$r_p : H^i_{\mathcal{M}}(X, r) \rightarrow H^i_{\text{syn}}(X_h, r),$$

de la cohomologie motivique vers la cohomologie syntomique compatibles avec les morphismes de périodes syntomiques et les réalisations étales, ont été définis dans [Nekovář et Nizioł 2016, Theorem A].

Soient  $X = \mathcal{KS}_{\Gamma_1(N)}^{k-2}$ ,  $j \geq 0$  et  $r = k + j$  (et donc  $\text{Fil}^r H^{k-1}_{\text{dR}}(\mathcal{KS}_{\Gamma_1(N)}^{k-2}) = 0$ ). On a  $H^k_{\text{syn}}(X_h, r) \cong H^{k-1}_{\text{dR}}(X) = \mathbf{D}_{\text{dR}}(H^{k-1}_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p))$  (cf. [Nekovář et Nizioł 2016, Remark 4.14] et le diagramme qui le précède pour la première égalité et [Kato 2004, Equation 11.3.3] pour la deuxième) et, en appliquant le projecteur  $\varepsilon$ , en projetant sur la partie correspondante à la forme  $\check{f} \otimes \eta$  et en tordant, on obtient des régulateurs  $p$ -adiques

$$r_p : H^1(M^*(1 + j)) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(\eta\chi^{j+1})).$$

La proposition 4.13 de [Nekovář et Nizioł 2016], avec  $q = k - 1$  (et  $r = j + k$ ) se traduit alors en la relation

$$\exp \circ r_p = r_{\text{ét}},$$

qui nous sera très utile dans la suite.

**II.B. Plongements  $p$ -adiques des valeurs spéciales.** Soient  $f$  comme ci-dessus et  $\eta : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow L^\times$  d'ordre fini, vu comme un caractère de Dirichlet en fixant un isomorphisme entre  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  et  $\mathbb{C}$ . La [proposition II.3](#) nous permet, en utilisant les régulateurs  $p$ -adiques, de donner un sens  $p$ -adique aux valeurs spéciales de la fonction  $L$  complexe associée à  $f$  en dehors de la bande critique.

Notons

$$D = D(\check{f})(k - 1),$$

qui est de Rham à poids de Hodge–Tate 0 et  $k - 1$ . On a, inspirés de la [proposition II.3](#), envie de voir les éléments  $r_p(\mathcal{Z}_{\text{Kato}}(\check{f} \otimes \eta, j, r, \xi)) \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D(\eta\chi^{j+1}))$  comme les transmutations des valeurs spéciales  $L(f, \eta^{-1}, j)$  en  $p$ -adique. Or, comme on l'a déjà remarqué, afin de construire une fonction interpolant ces valeurs, il faut les voir tous dans un même module. Rappelons que, pour  $\eta$  un caractère de Dirichlet, on a

$$\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, s) = \frac{\Gamma(s)}{(2i\pi)^s} \cdot L(f, \eta^{-1}, s).$$

**Définition 3.** On pose,<sup>31</sup> pour  $j \geq 0$ ,

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)) = \Gamma^*(-j) \cdot G(\eta) \cdot r_p(\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, r, \xi)) \otimes e_{\eta, j+1}^{\text{dR}, \vee} \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(D).$$

**II.C. Interpolation.** Dans cette section, on démontre que les constructions faites dans les chapitres précédents nous permettent d'interpoler les plongements  $p$ -adiques des valeurs spéciales de la fonction  $L$  complexe de  $f$  définis dans [II.B](#). Ceci constitue la preuve du théorème [II.1](#) annoncé au début du chapitre. On démontre d'abord, en utilisant un deuxième résultat de Gealy reliant les classes de cohomologie motiviques  $\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, r, \xi)$  au système d'Euler de Kato et le théorème [I.27](#), les propriétés d'interpolation des valeurs spéciales aux entiers négatifs. On sait déjà, d'après les résultats de Kato, que les valeurs interpolées par notre fonction dans la bande critique s'interprètent bien en termes des valeurs spéciales complexes. Finalement, en utilisant une équation fonctionnelle du système d'Euler de Kato établie par Nakamura et l'équation fonctionnelle du théorème [I.32](#), on obtiendra dans la section suivante une interprétation des valeurs spéciales aux entiers positifs  $j \geq k - 1$ , ce qui donne une image complète des valeurs interpolées par la fonction  $L$   $p$ -adique d'une forme modulaire.

**II.C1. Relèvement motivique des éléments de Kato.** Rappelons que, pour chaque  $\gamma \in V_L(\check{f})$ , on a des éléments dans la cohomologie d'Iwasawa

$$z_\gamma^{(p)}(\check{f})(k + j) = (z_{\gamma^n}^{(p)}(\check{f}, -j, \gamma))_{n \geq 1} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V(\check{f})(k + j))$$

construits par Kato [[2004](#), Theorem 12.5].

**Proposition II.4** [[Gealy 2006](#), Proposition 9.1.1]. *Soit  $\gamma \in V_L(\check{f})$ . Alors*

$$r_{\text{ét}}(\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, \gamma)) = \int_\Gamma 1 \cdot z_\gamma^{(p)}(\check{f} \otimes \eta)(k + j).$$

**Remarque II.5.** — La proposition 9.1.1 de [[Gealy 2006](#)] montre le résultat pour  $\gamma = \delta(\check{f}, r, \text{id})$ . Le cas  $\gamma = \delta(\check{f}, r, \xi)$  quelconque s'en déduit des compatibilités des réalisations par des correspondances

31. Notons que, dans la formule, on “mutiplier” et “diviser” par la somme de Gauss de  $\eta$ , de sorte qu'elle n'a moralement aucun effet. Le terme  $2i\pi$  correspond, dans le monde  $p$ -adique, à l'élément  $t$  de Fontaine, apparaissant dans le facteur  $e_{\eta, j+1}^{\text{dR}, \vee}$ . Enfin, le facteur  $\Gamma^*(j)$  est le coefficient principal de la série de Laurent de  $\Gamma(s)$  en  $s = -j$ , où elle a un pôle simple.

algébriques et de la définition des éléments zêta, et le cas d'un élément  $\gamma$  quelconque suit par linéarité.

— Remarquons que, par construction,  $z_\gamma^{(p)}(\check{f} \otimes \eta)(k + j) = z_\gamma^{(p)}(\check{f})(k) \otimes e_\eta \otimes e_j$  et la proposition ci-dessus s'exprime donc aussi comme

$$r_{\text{ét}}(\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, \gamma)) = \int_\Gamma \eta \chi^j \cdot z_\gamma^{(p)}(\check{f})(k).$$

**II C2.** *Interpolation aux entiers négatifs.* Notons

$$D(f) = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_L(f)|_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}), \quad D(\check{f}) = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_L(\check{f})|_{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}) \in \Phi \Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{Z})$$

les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules associés aux formes  $f$  et  $\check{f}$ . Rappelons que l'on a posé  $D = D(\check{f})(k - 1)$ , qui est de Rham à poids de Hodge–Tate 0 et  $k - 1$ , et notons

$$z_{\text{Kato}} = \text{Exp}^*(z_\gamma^{(p)}(\check{f})(k - 1)) \in \mathbf{D}_{\text{rig}}(V(\check{f})(k - 1))^{\psi=1} = D^{\psi=1}.$$

**Lemme II.6.** *Soit  $j \geq 0$ . On a*

$$\Lambda_{D, z_{\text{Kato}}}(\eta \chi^{-j-1}) = p^{-nj} G(\eta)^{-1} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, -j)).$$

*Démonstration.*

En utilisant la [proposition II.4](#) et la remarque qui le suit, on obtient

$$\exp^{-1}(r_{\text{ét}}(\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, \gamma))) = \exp^{-1}\left(\int_\Gamma \eta \chi^{j+1} \cdot \mu_{z_{\text{Kato}}}\right),$$

d'où, par la compatibilité entre le régulateur  $p$ -adique et le régulateur étale, on en déduit

$$\begin{aligned} \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-j}, -j)) &= \Gamma^*(-j) G(\eta) \cdot r_p(\mathcal{Z}(\check{f} \otimes \eta, j, \gamma)) \otimes \mathbf{e}_{\eta, j+1}^{\text{dR}, \vee} \\ &= \Gamma^*(-j) G(\eta) \cdot \exp^{-1}\left(\int_\Gamma \eta \chi^{j+1} \cdot \mu_{z_{\text{Kato}}}\right) \otimes \mathbf{e}_{\eta, j+1}^{\text{dR}, \vee}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, le [théorème I.27](#) affirme que

$$\Lambda_{D, z_{\text{Kato}}}(\eta \chi^{-j-1}) = p^{-nj} \Gamma^*(-j) \cdot \exp^{-1}\left(\int_\Gamma \eta \chi^{j+1} \cdot \mu_{z_{\text{Kato}}}\right) \otimes \mathbf{e}_{\eta, j+1}^{\text{dR}, \vee}. \quad \square$$

**II C3.** *La bande critique.* Si  $0 \leq j \leq k - 1$ , on pose

$$\iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j + 1)) = \Gamma^*(j + 1) G(\eta) \cdot \exp^*\left(\int_\Gamma \eta \chi^{-j} \cdot \mu_{z_{\text{Kato}}}\right) \otimes \mathbf{e}_{\eta, -j}^{\text{dR}, \vee}.$$

On sait, d'après [[Kato 2004](#), Theorem 12.5], que les images de ces valeurs par l'application de périodes sont reliées aux valeurs spéciales de la fonction  $L$  de  $f$ . Le lemme suivant est immédiat

**Lemme II.7.** *Soit  $0 \leq j \leq k - 1$ . Alors*

$$\Lambda_{D, z_{\text{Kato}}}(\eta \chi^j) = p^{n(j+1)} G(\eta)^{-1} \cdot \iota_p(\Lambda_\infty(f, \eta^{-1}, j + 1)).$$

**IID. Équation fonctionnelle et valeurs aux entiers positifs.** Pour l'interprétation  $p$ -adique des valeurs  $L(f, \eta, j)$ ,  $j \geq k$ , on fera appel à l'équation fonctionnelle de la fonction  $L$  locale, qui s'avéra fortement ressemblante à l'équation fonctionnelle complexe.

**IID1. L'équation fonctionnelle complexe.** Notons  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$  le groupe des adèles de  $\mathbb{Q}$ . Soit  $\eta : \mathbb{Z}_p^{\times} \rightarrow L^{\times}$  un caractère d'ordre fini. On regarde  $\eta$  comme un caractère de Dirichlet (via  $L^{\times} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times} \cong \mathbb{C}^{\times}$ ) ainsi que comme un caractère de Hecke de la façon usuelle.<sup>32</sup>

La forme  $f \otimes \eta$  est supercuspidale et on note

$$\pi(f \otimes \eta) = \bigotimes_{\ell}' \pi_{\ell}(f \otimes \eta)$$

la représentation automorphe de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$  associée à  $f \otimes \eta$ . On a  $\pi(f \otimes \eta) = \pi(f) \otimes \eta = \bigotimes_{\ell}' \pi_{\ell}(f) \otimes \eta$ . Notons  $\varepsilon(\pi(f) \otimes \eta, s)$  le facteur epsilon global de la représentation  $\pi(f \otimes \eta)$  défini par<sup>33</sup>

$$\varepsilon(\pi(f) \otimes \eta, s) = \varepsilon(\pi_{\infty}(f) \otimes \eta, s) \cdot \prod_{\ell} \varepsilon(\pi_{\ell}(f) \otimes \eta, s),$$

où  $\varepsilon(\pi_{\ell}(f) \otimes \eta, s)$  est le facteur epsilon de la représentation  $\pi_{\ell}(f) \otimes \eta$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{\ell})$ , comme décrit dans la section IID2, et  $\varepsilon(\pi_{\infty}(f) \otimes \eta, s) = i^k$ .

La fonction  $L$  complexe satisfait l'équation fonctionnelle<sup>34</sup>

$$\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cdot L(f, \eta^{-1}, s) = \varepsilon\left(\pi(f) \otimes \eta^{-1}, s - \frac{k-1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(k-s)}{(2\pi)^{k-s}} \cdot L(\check{f}, \eta, k-s).$$

Si  $j \geq k$  est un entier, on peut écrire l'équation fonctionnelle sous la forme

$$\frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j} \cdot L(f, \eta^{-1}, j) = i^k (-1)^{-j} \varepsilon(\pi(f) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{j-(k-1)/2}) \cdot \frac{\Gamma(k-j)}{(2i\pi)^{k-j}} \cdot L(\check{f}, \eta, k-j),$$

ou bien

$$\Lambda_{\infty}(f, \eta^{-1}, j) = i^k (-1)^{-j} \varepsilon(\pi(f) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{j-(k-1)/2}) \cdot \Lambda_{\infty}(\check{f}, \eta, k-j).$$

En décomposant le facteur epsilon, on peut réécrire l'équation fonctionnelle sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\infty}(f, \eta^{-1}, j) &= (-1)^{k-j} \varepsilon(\pi_p(f) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{j-(k-1)/2}) \cdot \prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_{\ell}(f) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{j-(k-1)/2}) \cdot \Lambda_{\infty}(\check{f}, \eta, k-j). \end{aligned}$$

Remarquons pour finir que, si l'on écrit  $N = N' p^r$ , alors, pour  $p \neq \ell | N$ , on a l'égalité

$$\varepsilon(\pi_{\ell}(f) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{j-(k-1)/2}) = \varepsilon(\pi_{\ell}(f)) \eta(\ell)^{c(\pi_{\ell}(f))} \ell^{-c(\pi_{\ell}(f))(j-(k-1)/2)},$$

32. Si  $\eta : \mathbb{Z}_p^{\times} \rightarrow L^{\times}$  est de conducteur  $p^n$ , il est vu comme un caractère des idèles en utilisant la décomposition  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{\times} \times \mathbb{R}^{>0} \times \overline{\mathbb{Z}}^{\times}$ . Le caractère de  $\mathbb{Q}_p^{\times}$  induit par  $\eta$  est  $\eta$  (avec  $\eta(p) = 1$ ) et, si  $\ell \neq p$ , celui de  $\mathbb{Q}_{\ell}^{\times}$  est l'unique caractère non ramifié caractère prenant la valeur  $\eta^{-1}(\bar{\ell})$  en  $\ell$ , où  $\bar{\ell} \in \mathbb{Z}_p^{\times}$  est n'importe quel relèvement de la classe de  $\ell$  modulo  $p^n$ .

33. Le produit étant fini car  $\pi_{\ell}(f \otimes \eta)$  est non ramifiée en presque toute place.

34. Le décalage en  $(k-1)/2$  provient du fait que les facteurs locaux des représentations de  $\mathrm{GL}_2$  sont normalisés de sorte que le centre de symétrie de l'équation fonctionnelle des fonctions  $L$  soit situé en  $\frac{1}{2}$ , tandis que celui des fonctions  $L$  automorphes l'est en  $\frac{k}{2}$ .

et, en utilisant le fait que le conducteur de  $\pi_\ell(f)$  est  $\ell^{v_\ell(N)}$ , on en déduit

$$\prod_{\ell \mid N'} \varepsilon(\pi_\ell(f) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{j-(k-1)/2}) = \eta(N')(N')^{(k-1)/2-j} \prod_{\ell \mid N'} \varepsilon(\pi_\ell(f)).$$

**IID2.** *L'équation fonctionnelle du système d'Euler de Kato, d'après Nakamura.* Écrivons  $N = N' p^r$ ,  $(N', N) = 1$ . Si  $\gamma \in V(\check{f})$ , notons  $\check{\gamma} \in V(f)$  l'élément dual à  $\gamma \otimes e_k$  sous l'accouplement parfait  $V(\check{f})(k) \times V(f) \rightarrow L$  donné par la dualité de Poincaré.

On note

$$\begin{aligned} z_{\text{Kato}} &= \text{Exp}^*(z_\gamma^{(p)}(\check{f})(k-1)) \in D(\check{f})(k-1)^{\psi=1} = D^{\psi=1}, \\ \check{z}_{\text{Kato}} &= \text{Exp}^*(z_{\check{\gamma}}^{(p)}(f)(k-1)) \in D(f)(k-1)^{\psi=1} = \check{D}(k-2)^{\psi=1}, \\ z_{\text{Kato}}^* &= w_D(z_{\text{Kato}}) \in \check{D}^{\psi=1}, \end{aligned}$$

les torsus des systèmes d'Euler associés aux formes  $\check{f}$  et  $f$  et l'image par l'involution de  $z_{\text{Kato}}$  (cf. la section ID4), respectivement.

**Proposition II.8** [Nakamura 2017, Conjecture 4.4, Theorem 4.6, Proposition 4.7]. *Notons  $[N'] = \prod_{\ell \mid N'} [\sigma_\ell]^{v_\ell(N')} \in \Lambda$ . Alors*

$$z_{\text{Kato}}^* = - \prod_{\ell \mid N'} \varepsilon(\pi_\ell(\check{f}) \otimes |\cdot|^{(k-1)/2})^{-1} \cdot ([N'] \cdot (\check{z}_{\text{Kato}} \otimes e_{2-k})).$$

**Remarque II.9.** — [Nakamura 2017, Conjecture 4.4] est énoncé en termes de facteurs epsilon des représentations de Weil–Deligne. Sa démonstration (dans le cas de Rham non triangulin) est basée sur la compatibilité locale-globale dans la correspondance de Langlands  $p$ -adique et [Nakamura 2017, Proposition 3.14]. Cette dernière proposition peut être énoncée naturellement (cf. le théorème I.31) en termes de facteurs locaux des représentations de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ . La preuve de la proposition ne ferait donc pas usage de la compatibilité locale-globale et elle resterait donc purement locale.

— Il faut faire un peu d'attention car les normalisations des facteurs locaux dans ce travail ne coïncident pas avec celles de [Nakamura 2017]. Comme on l'a remarqué, dans le texte présent, les facteurs locaux des représentations lisses sont normalisés de sorte que l'équation fonctionnelle de la fonction  $L$  soit centrée en  $s = \frac{1}{2}$ , tandis que, dans [Nakamura 2017], elle est centrée en  $s = \frac{k}{2}$ . La différence entre les facteurs locaux est donc un twist par  $|\cdot|^{(k-1)/2}$ .

**IID3.** *L'équation fonctionnelle de la fonction  $L$   $p$ -adique.* L'équation fonctionnelle du système d'Euler de Kato et l'équation fonctionnelle du théorème I.32 nous permettent d'interpréter les valeurs aux entiers positifs de la fonction  $\Lambda_{D, z_{\text{Kato}}}$ .

**Théorème II.10.** *Soit  $j > 0$  un entier. Alors*

$$\Lambda_{D, z_{\text{Kato}}}(\eta \chi^j) = C(f, \eta, j) \cdot \Lambda_{\check{D}(k-2), \check{z}_{\text{Kato}}}(\eta^{-1} \chi^{-j+k-2}) \otimes e_{k-1, \omega_D^{-1}}^{\text{dR}, \vee},$$

où

$$C(f, \eta, j) = \Omega p^n \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-j+(k-1)/2})^2 \varepsilon(\pi_p(\check{f}) \otimes \eta \otimes |\cdot|^{-j+k-1})^{-1} \cdot \prod_{\ell \mid N'} \varepsilon(\pi_\ell(\check{f}) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{-j+(k-1)/2})^{-1}.$$

*Démonstration.* En appliquant le [théorème I.32](#) (avec  $k - 1$  au lieu de  $k$ ,  $\eta^{-1}$  au lieu de  $\eta$  et  $-j + k - 2$  au lieu de  $j$ ), on obtient

$$\Lambda_{D, z_{\text{Kato}}}(\eta \chi^j) = C_1 \cdot \Lambda_{\check{D}(k-2), z_{\text{Kato}}^*(k-2)}(\eta^{-1} \chi^{-j+k-2}) \otimes e_{k-2, \omega_D^\vee}^{\text{dR}, \vee}, \quad (4)$$

où

$$C_1 = -\Omega p^{-n(k-2)} \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-j})^2 \varepsilon(\pi \otimes \eta \otimes |\cdot|^{-j})^{-1}.$$

Observons que

$$p^{-n(k-2)} \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-j})^2 = p^n (p^{-n(k-1)/2} \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-j}))^2 = p^n \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-l+(k-1)/2})^2.$$

Comme  $\pi = \pi(D) = \pi_p(\check{f}) \otimes |\cdot|^{k-1}$ , on en déduit

$$C_1 = -\Omega p^n \varepsilon(\eta \otimes |\cdot|^{-l+(k-1)/2})^2 \varepsilon(\pi_p(\check{f}) \otimes \eta \otimes |\cdot|^{-j+k-1})^{-1}.$$

D'après le [théorème I.27](#), on a

$$\Lambda_{\check{D}(k-2), z_{\text{Kato}}^*(k-2)}(\eta^{-1} \chi^{-j+k-2}) = \Gamma^*(-j+k-1) p^{n(-j+k-1)} \cdot \log \left( \int_{\Gamma} \eta^{-1} \chi^{j-k+2} \cdot \mu_{z_{\text{Kato}}^*(k-2)} \right) \otimes e_{\eta^{-1}, j-k+2}^{\text{dR}, \vee}.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \eta^{-1} \chi^{j-k+2} \cdot \mu_{z_{\text{Kato}}^*(k-2)} &= \int_{\Gamma} \eta^{-1} \chi^j \cdot \mu_{z_{\text{Kato}}^*} \\ &= - \prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_{\ell}(\check{f}) \otimes |\cdot|^{(k-1)/2})^{-1} \cdot \int_{\Gamma} \eta^{-1} \chi^j \cdot \mu_{[N'](\check{z}_{\text{Kato}}(2-k))} \\ &= - \prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_{\ell}(\check{f}) \otimes |\cdot|^{(k-1)/2})^{-1} \eta(N')(N')^{-j} \cdot \int_{\Gamma} \eta^{-1} \chi^{j-k+2} \cdot \mu_{\check{z}_{\text{Kato}}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé la [proposition II.8](#) dans la deuxième égalité, et la définition de l'action de  $\Lambda = \mathbb{Z}_p \llbracket \mathbb{Z}_p^\times \rrbracket$  sur  $D^{\psi=1}$  dans la troisième. En utilisant l'égalité

$$\prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_{\ell}(\check{f}) \otimes |\cdot|^{(k-1)/2}) \eta^{-1}(N')(N')^j = \prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_{\ell}(\check{f}) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{-j+(k-1)/2}),$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \Lambda_{\check{D}(k-2), z_{\text{Kato}}^*(k-2)}(\eta^{-1} \chi^{-j+k-2}) \\ = - \prod_{\ell | N'} \varepsilon(\pi_{\ell}(\check{f}) \otimes \eta^{-1} \otimes |\cdot|^{-j+(k-1)/2})^{-1} \cdot \Lambda_{\check{D}(k-2), \check{z}_{\text{Kato}}}(\eta^{-1} \chi^{-j+k-2}). \end{aligned} \quad (5)$$

En rassemblant les formules (4) et (5), on déduit le résultat. □

**Remarque II.11.** Notons que, pour  $j > k - 2$ , les valeurs du côté droite de la formule du théorème s'interprètent en termes des valeurs spéciales de la fonction  $L$  complexe de  $\check{f}$ . En utilisant l'équation fonctionnelle complexe on peut traduire ceci et donner une formule d'interpolation de la fonction  $L$   $p$ -adique en termes de valeurs spéciales complexes en tout entier  $j \in \mathbb{Z}$ .



## Remerciements

Le travail présent fait partie de ma thèse de doctorat réalisée à l’Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche (IMJ-PRG) sous la direction de Pierre Colmez. Je tiens à lui exprimer mes plus grands et sincères remerciements pour tout ce qu’il m’a appris et pour tout le temps qu’il a investi dans ma formation mathématique, avec disponibilité et bonne humeur. Je remercie aussi Arthur-César Le Bras, Gabriel Dospinescu et Shanwen Wang, avec qui j’ai partagé des nombreuses discussions qui ont beaucoup aidé à ma compréhension du sujet. Je remercie finalement les rapporteurs pour ses remarques et corrections.

## Bibliographie

- [Amice et Vélú 1975] Y. Amice et J. Vélú, “Distributions  $p$ -adiques associées aux séries de Hecke”, pp. 119–131 dans *Journées Arithmétiques de Bordeaux*, Astérisque **24-25**, Soc. Math. France, Paris, 1975. [MR](#) [Zbl](#)
- [Bellaïche 2012] J. Bellaïche, “Critical  $p$ -adic  $L$ -functions”, *Invent. Math.* **189**:1 (2012), 1–60. [MR](#)
- [Berger 2002] L. Berger, “Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles”, *Invent. Math.* **148**:2 (2002), 219–284. [MR](#) [Zbl](#)
- [Berger 2003] L. Berger, “Bloch and Kato’s exponential map: three explicit formulas”, *Doc. Math. Kazuya Kato’s Sixtieth Birthday volume* (2003), 99–129. [MR](#) [Zbl](#)
- [Berger 2008] L. Berger, “Équations différentielles  $p$ -adiques et  $(\phi, N)$ -modules filtrés”, pp. 13–38 dans *Représentations  $p$ -adiques de groupes  $p$ -adiques, I : Représentations galoisiennes et  $(\phi, \Gamma)$ -modules*, Astérisque **319**, Soc. Math. France, Paris, 2008. [MR](#) [Zbl](#) [arXiv](#)
- [Berger et Breuil 2010] L. Berger et C. Breuil, “Sur quelques représentations potentiellement cristallines de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ ”, pp. 155–211 in Astérisque **330**, Soc. Math. France, Paris, 2010. [MR](#) [Zbl](#)
- [Besser 2000] A. Besser, “Syntomic regulators and  $p$ -adic integration, I: Rigid syntomic regulators”, *Israel J. Math.* **120**:2 (2000), 291–334. [MR](#) [Zbl](#)
- [Beilinson 1986] A. A. Beilinson, “Higher regulators of modular curves”, pp. 1–34 dans *Applications of algebraic  $K$ -theory to algebraic geometry and number theory, I* (Boulder, CO, 1983), édité par S. J. Bloch et al., Contemp. Math. **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986. [MR](#) [Zbl](#)
- [Bushnell et Henniart 2006] C. J. Bushnell et G. Henniart, *The local Langlands conjecture for  $GL(2)$* , Grundlehren der Math. Wissenschaften **335**, Springer, 2006. [MR](#) [Zbl](#)
- [Cherbonnier et Colmez 1998] F. Cherbonnier et P. Colmez, “Représentations  $p$ -adiques surconvergentes”, *Invent. Math.* **133**:3 (1998), 581–611. [MR](#) [Zbl](#)
- [Cherbonnier et Colmez 1999] F. Cherbonnier et P. Colmez, “Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques d’un corps local”, *J. Amer. Math. Soc.* **12**:1 (1999), 241–268. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez 1998] P. Colmez, “Théorie d’Iwasawa des représentations de de Rham d’un corps local”, *Ann. of Math. (2)* **148**:2 (1998), 485–571. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez 2004] P. Colmez, “La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer  $p$ -adique”, pp. 251–319 in Astérisque **294**, Soc. Math. France, Paris, 2004. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez 2008] P. Colmez, “Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham”, pp. 117–186 dans *Représentations  $p$ -adiques de groupes  $p$ -adiques, I : Représentations galoisiennes et  $(\phi, \Gamma)$ -modules*, Astérisque **319**, Soc. Math. France, Paris, 2008. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez 2010] P. Colmez, “Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\phi, \Gamma)$ -modules”, pp. 281–509 in Astérisque **330**, Soc. Math. France, Paris, 2010. [MR](#) [Zbl](#)

- [Colmez et Dospinescu 2014] P. Colmez et G. Dospinescu, “Complétés universels de représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ ”, *Algebra Number Theory* **8**:6 (2014), 1447–1519. [MR](#) [Zbl](#)
- [Colmez et Nizioł 2017] P. Colmez et W. Nizioł, “Syntomic complexes and  $p$ -adic nearby cycles”, *Invent. Math.* **208**:1 (2017), 1–108. [MR](#) [Zbl](#)
- [Delbourgo 2002] D. Delbourgo, “On the  $p$ -adic Birch, Swinnerton-Dyer conjecture for non-semistable reduction”, *J. Number Theory* **95**:1 (2002), 38–71. [MR](#) [Zbl](#)
- [Deninger et Scholl 1991] C. Deninger et A. J. Scholl, “The Beilinson conjectures”, pp. 173–209 dans *L-functions and arithmetic* (Durham, UK, 1989), édité par J. Coates et M. J. Taylor, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **153**, Cambridge Univ. Press, 1991. [MR](#) [Zbl](#)
- [Fontaine 1990] J.-M. Fontaine, “Représentations  $p$ -adiques des corps locaux, I”, pp. 249–309 dans *The Grothendieck Festschrift, II*, édité par P. Cartier et al., Progr. Math. **87**, Birkhäuser, Boston, 1990. [MR](#) [Zbl](#)
- [Gealy 2003] M. T. Gealy, “Special values of  $p$ -adic  $l$  functions associated to modular forms”, unpublished manuscript, 2003.
- [Gealy 2006] M. T. Gealy, *On the Tamagawa number conjecture for motives attached to modular forms*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 2006, Voir <https://search.proquest.com/docview/305351198>.
- [Gros 1990] M. Gros, “Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions  $L$   $p$ -adiques, I”, *Invent. Math.* **99**:2 (1990), 293–320. [MR](#) [Zbl](#)
- [Herr 2001] L. Herr, “Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate”, *Math. Ann.* **320**:2 (2001), 307–337. [MR](#) [Zbl](#)
- [Kato 2004] K. Kato, “ $p$ -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms”, pp. 117–290 dans *Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques, III*, Astérisque **295**, Soc. Math. France, Paris, 2004. [MR](#) [Zbl](#)
- [Kedlaya 2004] K. S. Kedlaya, “A  $p$ -adic local monodromy theorem”, *Ann. of Math. (2)* **160**:1 (2004), 93–184. [MR](#) [Zbl](#)
- [Kedlaya et al. 2014] K. S. Kedlaya, J. Pottharst et L. Xiao, “Cohomology of arithmetic families of  $(\varphi, \Gamma)$ -modules”, *J. Amer. Math. Soc.* **27**:4 (2014), 1043–1115. [MR](#) [Zbl](#)
- [Liu 2008] R. Liu, “Cohomology and duality for  $(\varphi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring”, *Int. Math. Res. Not.* **2008**:3 (2008), art. id. rnm150. [MR](#) [Zbl](#)
- [Loeffler et Weinstein 2012] D. Loeffler et J. Weinstein, “On the computation of local components of a newform”, *Math. Comp.* **81**:278 (2012), 1179–1200. [MR](#) [Zbl](#)
- [Manin 1973] J. I. Manin, “Periods of cusp forms, and  $p$ -adic Hecke series”, *Mat. Sb. (N.S.)* **92(134)**:3 (1973), 378–401. In Russian; translated in *Math. USSR-Sb.* **21**:3 (1973), 371–393. [MR](#) [Zbl](#)
- [Mazur et al. 1986] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, “On  $p$ -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer”, *Invent. Math.* **84**:1 (1986), 1–48. [MR](#) [Zbl](#)
- [Nakamura 2014] K. Nakamura, “Iwasawa theory of de Rham  $(\varphi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring”, *J. Inst. Math. Jussieu* **13**:1 (2014), 65–118. [MR](#) [Zbl](#)
- [Nakamura 2017] K. Nakamura, “Local  $\varepsilon$ -isomorphisms for rank two  $p$ -adic representations of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  and a functional equation of Kato’s Euler system”, *Camb. J. Math.* **5**:3 (2017), 281–368. [MR](#) [Zbl](#)
- [Nekovář et Nizioł 2016] J. Nekovář et W. Nizioł, “Syntomic cohomology and  $p$ -adic regulators for varieties over  $p$ -adic fields”, *Algebra Number Theory* **10**:8 (2016), 1695–1790. [MR](#) [Zbl](#)
- [Nizioł 1997] W. Nizioł, “On the image of  $p$ -adic regulators”, *Invent. Math.* **127**:2 (1997), 375–400. [MR](#) [Zbl](#)
- [Perrin-Riou 1994] B. Perrin-Riou, “Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques sur un corps local”, *Invent. Math.* **115**:1 (1994), 81–161. [MR](#) [Zbl](#)
- [Perrin-Riou 1995] B. Perrin-Riou, *Fonctions  $L$   $p$ -adiques des représentations  $p$ -adiques*, Astérisque **229**, Soc. Math. France, Paris, 1995. [MR](#) [Zbl](#)
- [Pollack et Stevens 2013] R. Pollack et G. Stevens, “Critical slope  $p$ -adic  $L$ -functions”, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **87**:2 (2013), 428–452. [MR](#) [Zbl](#)

- [Pottharst 2012] J. Pottharst, “Cyclotomic Iwasawa theory of motives”, preprint, 2012, Voir <https://vbrt.org/writings/cyc.pdf>.
- [Rodrigues Jacinto 2018] J. Rodrigues Jacinto, “La conjecture  $\varepsilon$  locale de Kato en dimension 2”, *Math. Ann.* (online publication March 2018).
- [Schmidt 2002] R. Schmidt, “Some remarks on local newforms for  $GL(2)$ ”, *J. Ramanujan Math. Soc.* **17**:2 (2002), 115–147. [MR](#) [Zbl](#)
- [Schneider et Teitelbaum 2003] P. Schneider et J. Teitelbaum, “Algebras of  $p$ -adic distributions and admissible representations”, *Invent. Math.* **153**:1 (2003), 145–196. [MR](#) [Zbl](#)
- [Scholl 1990] A. J. Scholl, “Motives for modular forms”, *Invent. Math.* **100**:2 (1990), 419–430. [MR](#) [Zbl](#)
- [Višik 1976] M. M. Višik, “Nonarchimedean measures associated with Dirichlet series”, *Mat. Sb. (N.S.)* **99(141)**:2 (1976), 248–260. In Russian; translated in *Math. USSR-Sb.* **28**:2 (1976), 216–228. [MR](#)

Communicated by Christopher Skinner

Received 2017-02-18    Revised 2018-01-10    Accepted 2018-02-23

[j.jacinto@ucl.ac.uk](mailto:j.jacinto@ucl.ac.uk)

*University College London, United Kingdom*

# Algebra & Number Theory

[msp.org/ant](http://msp.org/ant)

## EDITORS

### MANAGING EDITOR

Bjorn Poonen  
Massachusetts Institute of Technology  
Cambridge, USA

### EDITORIAL BOARD CHAIR

David Eisenbud  
University of California  
Berkeley, USA

### BOARD OF EDITORS

Richard E. Borcherds	University of California, Berkeley, USA	Martin Olsson	University of California, Berkeley, USA
Antoine Chambert-Loir	Université Paris-Diderot, France	Raman Parimala	Emory University, USA
J-L. Colliot-Thélène	CNRS, Université Paris-Sud, France	Jonathan Pila	University of Oxford, UK
Brian D. Conrad	Stanford University, USA	Anand Pillay	University of Notre Dame, USA
Samit Dasgupta	University of California, Santa Cruz, USA	Michael Rapoport	Universität Bonn, Germany
Hélène Esnault	Freie Universität Berlin, Germany	Victor Reiner	University of Minnesota, USA
Gavril Farkas	Humboldt Universität zu Berlin, Germany	Peter Sarnak	Princeton University, USA
Hubert Flenner	Ruhr-Universität, Germany	Joseph H. Silverman	Brown University, USA
Sergey Fomin	University of Michigan, USA	Michael Singer	North Carolina State University, USA
Edward Frenkel	University of California, Berkeley, USA	Christopher Skinner	Princeton University, USA
Andrew Granville	Université de Montréal, Canada	Vasudevan Srinivas	Tata Inst. of Fund. Research, India
Joseph Gubeladze	San Francisco State University, USA	J. Toby Stafford	University of Michigan, USA
Roger Heath-Brown	Oxford University, UK	Pham Huu Tiep	University of Arizona, USA
Craig Huneke	University of Virginia, USA	Ravi Vakil	Stanford University, USA
Kiran S. Kedlaya	Univ. of California, San Diego, USA	Michel van den Bergh	Hasselt University, Belgium
János Kollár	Princeton University, USA	Marie-France Vignéras	Université Paris VII, France
Philippe Michel	École Polytechnique Fédérale de Lausanne	Kei-Ichi Watanabe	Nihon University, Japan
Susan Montgomery	University of Southern California, USA	Shou-Wu Zhang	Princeton University, USA
Shigefumi Mori	RIMS, Kyoto University, Japan		

## PRODUCTION

[production@msp.org](mailto:production@msp.org)

Silvio Levy, Scientific Editor

---

See inside back cover or [msp.org/ant](http://msp.org/ant) for submission instructions.

---

The subscription price for 2018 is US \$340/year for the electronic version, and \$535/year (+\$55, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.


---

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

---

ANT peer review and production are managed by EditFLOW® from MSP.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**  
nonprofit scientific publishing

<http://msp.org/>

© 2018 Mathematical Sciences Publishers

# Algebra & Number Theory

Volume 12    No. 4    2018

---

A generic slice of the moduli space of line arrangements	751
KENNETH ASCHER and PATRICIO GALLARDO	
Parabolic induction and extensions	779
JULIEN HAUSEUX	
Akizuki–Witt maps and Kaletha’s global rigid inner forms	833
OLIVIER TAÏBI	
$(\varphi, \Gamma)$ -modules de de Rham et fonctions $L$ $p$ -adiques	885
JOAQUÍN RODRIGUES JACINTO	
Invariant theory of $\wedge^3(9)$ and genus-2 curves	935
ERIC M. RAINS and STEVEN V SAM	
Sums of two cubes as twisted perfect powers, revisited	959
MICHAEL A. BENNETT, CARMEN BRUNI and NUNO FREITAS	