Algebra & Number Theory

Volume 17
2023
No. 1

Correction à l'article Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée

Yang Cao

msp

ALGEBRA AND NUMBER THEORY 17:1 (2023)
https://doi.org/10.2140/ant.2023.17.261

Correction à l'article Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée

Yang Cao

Volume **14**:8 (2020), 2151–2183

Le paragraphe 2 de l'article dans l'en-tête utilise un énoncé sur la formule de Künneth de degré 2 publié par Skorobogatov et Zarhin en 2014. Il a été remarqué que cet énoncé n'est pas correct. Nous corrigeons notre paragraphe 2, le seul affecté par cette erreur.

Section 2 of the article in the header uses a statement on Künneth's formula in degree 2 published by Skorobogatov and Zarhin in 2014. It has been pointed out that this statement is incorrect. We correct our Section 2, the only one affected by the error.

Tous les résultats de [Cao 2020] sont corrects sauf certains résultats du paragraphe 2. La proposition 2.2 ainsi que les corollaires 2.4 et 2.7 sont corrects, et ce sont les seuls résultats que nous utilisons dans le reste de l'article. Mais la formule de Künneth de degré 2 (proposition 2.6) n'est pas valide. Sa démonstration repose sur [Skorobogatov et Zarhin 2014, Proposition 2.2], qui n'est pas vraie : voir la remarque 1.2 du correctif de cet article pour un contre-exemple. Plus précisément, le morphisme noté par $-\circ-$ dans le premier diagramme commutatif de la preuve de [Cao 2020, corollaire 2.3] n'est pas un isomorphisme. De ce fait, il y a des erreurs dans le corollaire 2.3 et donc dans le lemme 2.5 et la proposition 2.6. Dans ce corrigendum, nous corrigeons les énoncés [Cao 2020, proposition 2.6] (remplacé par le théorème 2.1 ci-dessous) et aussi la démonstration de [Cao 2020, corollaire 2.7] (remplacé par le corollaire 2.2 ci-dessous). De plus, dans le livre récent de Colliot-Thélène et Skorobogatov [2021], les auteurs corrigent aussi la formule de Künneth de [Skorobogatov et Zarhin 2014] en utilisant la méthode de l'auteur tirée de ce corrigendum (voir [Colliot-Thélène et Skorobogatov 2021, §5.7.3]).

Dans toute cette note, k est un corps quelconque, k_s une clôture séparable de k et $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété. Fixons un entier $n \geq 2$ avec $\mathrm{char}(k) \nmid n$. Soient U, V deux k-variétés géométriquement intègres. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \times_k V \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & V \arrow[d, "q_2"] \\ U \arrow[r, "q_1"] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd} \tag{0-1}$$

MSC2020 : 14G12.
Mots-clefs : Hasse principle, Brauer–Manin obstruction.

1. Rappels

Nous rappelons la notion de torseur universel de n-torsion, la formule de Künneth générale et l'homomorphisme ε dans [Skorobogatov et Zarhin 2014, §5] et dans [Cao 2020, (2-9)].

Soit X une k-variété géométriquement intègre. Soit S_X un k-groupe fini commutatif tel que $n \cdot S_X = 0$ et que $S_X^* := \mathrm{Hom}_{k_s}(S_X, \mu_n) \cong H^1(X_{k_s}, \mu_n)$ comme Γ_k-modules. Pour la notion de *torseur universel de n-torsion pour X*, nous renvoyons à [Cao 2020, définition 2.1]. La propriété fondamentale d'un torseur universel de n-torsion est la proposition 1.1 ci-dessous.

Proposition 1.1 [Cao 2020, proposition 2.2]. *Soit $\mathcal{T}_X$ un torseur universel de n-torsion pour X. Soit S un k-groupe fini commutatif tel que $n \cdot S = 0$. Alors, pour tout S-torseur Y sur X, il existe un unique homomorphisme $\phi : S_X \to S$ tel que*

$$\phi_*([\mathcal{T}_X]) - [Y] \in \mathrm{Im}(H^1(k, S) \to H^1(X, S)).$$

L'homomorphisme ϕ dans la proposition 1.1 est appelé *le n-type de* $[Y]$. Il induit un isomorphisme de Γ_k-modules

$$\tau_{X,S} : \mathrm{Hom}_{k_s}(S_X, S) \to H^1(X_{k_s}, S), \quad \phi \mapsto \phi_*([\mathcal{T}_X]). \tag{1-1}$$

Par exemple, $\tau_{X,\mu_n} : \mathrm{Hom}_{k_s}(S_X, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{k_s}, \mu_n)$ est un isomorphisme.

Rappelons que $H^1(X_{k_s}, S)$ est fini.

De plus, si $X(k) \neq \varnothing$, alors pour chaque $x \in X(k)$ il existe alors un unique torseur universel de n-torsion $\mathcal{T}_X$ pour X tel que $x^*[\mathcal{T}_X] = 0 \in H^1(k, S_X)$ (voir [Cao 2020, p. 2157]).

Considérons le diagramme commutatif (0-1).

Rappelons la formule de Künneth dans [SGA 4½ 1977]. Soit m un entier avec $m \mid n$. Soient $D^-(k)$ et $D^+(k)$ les catégories dérivées bornées respectivement à droite et à gauche de la catégorie des $\mathbb{Z}/m$-faisceaux étales sur le petit site de $\mathrm{Spec}\, k$. Par abus de notation, pour un objet M de $\mathrm{Sh}(k)$, on note M l'objet de $D^+(k)$ représenté par le complexe qui consiste en M en degré 0.

Soient M, N deux k-groupes finis commutatifs tels que $M(k_s)$, $N(k_s)$ soient des $\mathbb{Z}/m$-modules plats. Alors $M \otimes^L_{\mathbb{Z}/m} N = M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N$ et le cup-produit donne un quasi-isomorphisme ([SGA 4½ 1977, Théorèmes de finitude, corollaire 1.11, p. 236] ou [Fu 2011, Corollary 9.3.5]), c'est-à-dire que

$$\cup : Rq_{1,*}M \otimes^L_{\mathbb{Z}/m} Rq_{2,*}N \cong R(q_1 \circ p_1)_*(M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N)$$

dans $D^-(k)$. Ceci induit le cup-produit [Fu 2011, Proposition 6.4.12]

$$\cup_j : \bigoplus_{r+s=j} R^r q_{1,*}M \otimes_{\mathbb{Z}/m} R^s q_{2,*}N \to \mathcal{H}^j(Rq_{1,*}M \otimes^L_{\mathbb{Z}/m} Rq_{2,*}N) \sim R^j(q_1 \circ p_1)_*(M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N).$$

Dans le cas où $m = p$ est un nombre premier, puisque $\mathbb{Z}/p$ est un corps, tout $\mathbb{Z}/p$-module est plat et $- \otimes^L_{\mathbb{Z}/p} - = - \otimes_{\mathbb{Z}/p} -$. Le cup-produit ci-dessus induit pour tout j un isomorphisme

$$\cup_j : \bigoplus_{r+s=j} R^r q_{1,*}M \otimes_{\mathbb{Z}/p} R^s q_{2,*}N \xrightarrow{\sim} R^j(q_1 \circ p_1)_*(M \otimes_{\mathbb{Z}/p} N). \tag{1-2}$$

Soit S un k-groupe fini commutatif avec $n \cdot S = 0$.

Pour le diagramme (0-1), la formation des $Rq_{2,*}(S)$ sur $\operatorname{Spec} k$ commute avec tout changement de base [SGA 4½ 1977, Théorèmes de finitude, théorème 1.9 (ii), p. 236], et donc on obtient

$$Rp_{1,*}p_2^*(S) \cong q_1^* Rq_{2,*}(S). \tag{1-3}$$

En fait, pour appliquer ce théorème, on choisit $X = V$, $Y = S = \operatorname{Spec} k$, $S' = U$ pour les X, Y, S, S' dans [SGA 4½ 1977, Théorèmes de finitude, théorème 1.9, p. 236].

Rappelons maintenant l'homomorphisme ε de Skorobogatov et Zarhin.

Supposons qu'il existe des torseurs universels de n-torsion $\mathcal{T}_U$ pour U (sous le groupe S_U) et $\mathcal{T}_V$ pour V (sous le groupe S_V). Skorobogatov et Zarhin [2014, §5] introduisent un homomorphisme

$$\varepsilon' : \operatorname{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \to H^2(U \times V, S), \quad \phi \mapsto \phi_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]), \tag{1-4}$$

où $\cup$ est le cup-produit $H^1(U, S_U) \times H^1(V, S_V) \to H^2(U \times V, S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V)$.

Dans le cas où $S := M \otimes_{\mathbb{Z}/n} N \cong M \otimes_{\mathbb{Z}/m} N$ (puisque $m \mid n$), on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}(S_U, M) \otimes_{\mathbb{Z}/n} \operatorname{Hom}(S_V, N) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\cong"', "\tau_{U,M}\otimes\tau_{V,N}"] & \operatorname{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, M \otimes_{\mathbb{Z}/n} N) \arrow[r, "="] & \operatorname{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ H^1(U, M) \otimes_{\mathbb{Z}/n} H^1(V, N) \arrow[r, "\cong"] & H^1(U, M) \otimes_{\mathbb{Z}/m} H^1(V, N) \arrow[r, "\cup_2"] & H^2(U \times V, S) \end{tikzcd} \tag{1-5}$$

où $\tau_{U,M} \otimes \tau_{V,N}$ est induit par (1-1) qui est donc un isomorphisme, $\cup_2$ est induit par (1-2) et $\xi(\phi_1, \phi_2) = \phi_1 \otimes_{\mathbb{Z}/n} \phi_2$.

Ce diagramme est commutatif, car pour tout $\phi_1 \in \operatorname{Hom}(S_U, M)$, $\phi_2 \in \operatorname{Hom}(S_V, N)$, on a

$$\cup_2 \circ (\tau_{U,M} \otimes \tau_{V,N})(\phi_1, \phi_2) = \phi_{1,*}[\mathcal{T}_U] \cup \phi_{2,*}[\mathcal{T}_V] \overset{(1)}{=} (\phi_1 \otimes \phi_2)_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]) = \varepsilon'(\phi_1 \otimes \phi_2) = (\varepsilon' \circ \xi)(\phi_1, \phi_2),$$

où (1) découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1(U, S_U) \times H^1(V, S_V) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\phi_{1,*} \times \phi_{2,*}"] & H^2(U \times V, S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V) \arrow[d, "(\phi_1 \otimes \phi_2)_*"] \\ H^1(U, M) \times H^1(V, N) \arrow[r, "\cup"] & H^2(U \times V, S) \end{tikzcd}$$

Remarque 1.2. Dans le cas où $S = \mu_n$, le ε' dans (1-4) est essentiellement le ε dans [Skorobogatov et Zarhin 2014, §5] et dans [Cao 2020, (2-9)]. Plus précisément, $S_V^* := \operatorname{Hom}_{k_s}(S_V, \mu_n)$ et

$$\varepsilon : \operatorname{Hom}_k(S_U, S_V^*) \to H^2(U \times V, \mu_n), \quad \phi \mapsto \eta_*(\phi_*[\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]),$$

où $\eta : S_V^* \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V \to \mu_n$ est le morphisme d'évaluation. Dans ce cas, on a

$$\varepsilon \circ \varphi = \varepsilon',$$

où $\varphi : \mathrm{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(S_U, \mathrm{Hom}_{k_s}(S_V, \mu_n)) = \mathrm{Hom}_k(S_U, S_V^*)$ est l'isomorphisme canonique induit par les foncteurs adjoints $-\otimes_{\mathbb{Z}/p} S_V$ et $\mathrm{Hom}_{k_s}(S_V, -)$.

Ceci est valide, car pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_k(S_U, S_V^*)$, on a $\varphi^{-1}(\phi) = \eta \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_{S_V})$ et donc

$$\varepsilon(\phi) = \eta_*(\phi_*[\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]) = \eta_*((\phi \otimes \mathrm{id}_V)_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V])) = \varphi^{-1}(\phi)_*([\mathcal{T}_U] \cup [\mathcal{T}_V]) = (\varepsilon' \circ \varphi^{-1})(\phi).$$

2. Théorème principal

Voici la version correcte de la formule de Künneth de degré 2, qui remplace [Cao 2020, proposition 2.6].

Théorème 2.1. *Supposons que k est séparablement clos. Soient U, V deux k-variétés géométriquement intègres et S un $\mathbb{Z}/n$-module fini (vu comme un k-groupe commutatif). Considérons le diagramme* (0-1) *et l'homomorphisme ε' dans* (1-4) *ci-dessus. Alors on a des isomorphismes*

$$\psi^1(S) : H^1(U, S) \oplus H^1(V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H^1(U \times V, S),$$
$$\psi^2(S) : H^2(U, S) \oplus H^2(V, S) \oplus \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*, \varepsilon')} H^2(U \times V, S),$$

et un homomorphisme injectif $\psi^3(S) : H^3(U, S) \oplus H^3(V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H^3(U \times V, S)$.

Démonstration. Puisque k est séparablement clos, $U(k) \neq \varnothing$ et $V(k) \neq \varnothing$. Fixons deux points $u \in U(k)$, $v \in V(k)$. L'existence des sections

$$l_v : U \times v \to U \times V, \quad l_u : u \times V \to U \times V$$

de p_1, p_2 impliquent que l'homomorphisme $(p_1^*, p_2^*) :\ H^i(U, S) \oplus H^i(V, S) \to H^i(U \times V, S)$ est injectif et scindé pour tout $i \geq 1$. Soit

$$H^2_{\mathrm{prim}}(S) := \mathrm{Ker}(H^2(U \times V, S) \xrightarrow{(l_v^*, l_u^*)} H^2(U, S) \oplus H^2(V, S)).$$

Puisque $[\mathcal{T}_U]|_u = 0$, $[\mathcal{T}_V]|_v = 0$, on a $l_u^* \circ \varepsilon' = 0$ et $l_v^* \circ \varepsilon' = 0$, et donc $\mathrm{Im}(\varepsilon') \subset H^2_{\mathrm{prim}}(S)$.

Considérons la suite spectrale $E_2^{i,j} = R^i q_{1,*} R^j p_{1,*}(S) \Rightarrow H^{i+j}(U \times V, S)$. On a :

(i) Par définition, l'homomorphisme

$$H^i(U, S) = R^i q_{1,*}(S) = E_2^{i,0} \to H^i(U \times V, S)$$

est exactement $p_1^* : H^i(U, S) \to H^i(U \times V, S)$, qui est injectif et scindé.

(ii) Puisque

$$Rp_{1,*}(S) = Rp_{1,*}p_2^*(S) \overset{(1\text{-}3)}{\cong} q_1^* Rq_{2,*}(S) = q_1^* R\Gamma(V, S), \tag{2-1}$$

tout $R^j p_{1,*}(S)$ est le faisceau constant $H^j(V, S)$. La composition

$$H^j(V, S) \to H^j(U \times V, S) \to E_2^{0,j} = q_{1,*}(H^j(V, S)) = H^j(V, S)$$

est l'identité, puisqu'elle est l'identité sur $u \times V$. Donc $H^j(U \times V, S) \to E_2^{0,j}$ est surjectif et scindé.

(iii) D'après (1-1), $E_2^{1,1} = H^1(U, H^1(V, S)) \cong \mathrm{Hom}(S_U, \mathrm{Hom}(S_V, S)) \cong \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)$, qui est un groupe fini. Ainsi $|E_2^{1,1}| = |\mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)|$.

D'après (i) et (ii),

$$H^1(U \times V, S) \cong E_2^{1,0} \oplus E_2^{0,1},\ H^2(U \times V, S) \cong E_2^{2,0} \oplus E_2^{0,2} \oplus E_2^{1,1},$$

et, dans ces sommes directes, (p_1^*, p_2^*) induit les isomorphismes $H^j(U, S) \oplus H^j(V, S) \cong E_2^{j,0} \oplus E_2^{0,j}$ pour $j = 1, 2$. Alors $H^2_{\mathrm{prim}}(S) \cong E_2^{1,1}$ et, d'après (iii), $|\mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)| = |H^2_{\mathrm{prim}}(S)|$. Ainsi $\varepsilon' : \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \to H^2_{\mathrm{prim}}(S)$ est un isomorphisme si et seulement si ε' est injectif.

On a donc montré :

(iv) $\psi^1(S)$ est un isomorphisme et $\psi^3(S)$ est injectif.

(v) $\psi^2(S)$ est un isomorphisme si et seulement si $\psi^2(S)$ est injectif, si et seulement si ε' est injectif.

Dans le cas où $|S|$ est un nombre premier p, on a $S \cong \mathbb{Z}/p$ et on considère le diagramme (1-5) avec $M \cong N \cong \mathbb{Z}/p$. Dans ce diagramme, ξ est un isomorphisme et, d'après (1-2), $\cup_2$ est injectif. Alors ε' est injectif et, d'après (v), $\psi^2(S)$ est un isomorphisme.

Dans le cas général, par récurrence sur $|S|$, on peut supposer que $\psi^2(S')$ est un isomorphisme pour tout $\mathbb{Z}/n$-module fini S' avec $|S'| < |S|$. Alors, si $|S|$ n'est pas un nombre premier, il existe une suite exacte $0 \to S_1 \to S \to S_2 \to 0$ de $\mathbb{Z}/n$-modules finis avec $S_1, S_2 \neq 0$. Ceci induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S_1) \to \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \to \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S_2)$$

et donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^1(U, S_2) \oplus H^1(V, S_2) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\psi^1(S_2)"] & F(S_1) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^2(S_1)"] & F(S) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^2(S)"] & F(S_2) \arrow[d, "\psi^2(S_2)"] \\
H^1(U \times V, S_2) \arrow[r] & H^2(U \times V, S_1) \arrow[r] & H^2(U \times V, S) \arrow[r] & H^2(U \times V, S_2)
\end{tikzcd}$$

où $F(S) := H^2(U, S) \oplus H^2(V, S) \oplus \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S)$ et f_1 est la composition

$$H^1(U, S_2) \oplus H^1(V, S_2) \xrightarrow{(\partial_U, \partial_V, 0)} H^2(U, S_1) \oplus H^2(V, S_1) \oplus \mathrm{Hom}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S_1) = F(S_1).$$

Puisque $|S_1|, |S_2| < |S|$, par récurrence, $\psi^2(S_1)$, $\psi^2(S_2)$ sont des isomorphismes. D'après (iv), $\psi^1(S_2)$ est un isomorphisme. Par (v) et le lemme des cinq, $\psi^2(S)$ est injectif et donc un isomorphisme, ce qui établit le théorème. □

Soient U, V deux variétés géométriquement intègres sur k. On considère le diagramme commutatif (0-1) ci-dessus. Soit S un k-groupe fini commutatif avec $n \cdot S = 0$.

Si $U(k) \neq \varnothing$, alors il existe un torseur universel de n-torsion pour U. Un point $u \in U(k)$ induit $u^* : Rq_{1,*}S \to S$ et un morphisme surjectif $u^* : H^i(U, S) \to H^i(k, S)$ pour tout i. Notons

$$H^i_u(U, S) := \mathrm{Ker}(H^i(U, S) \xrightarrow{u^*} H^i(k, S)).$$

Corollaire 2.2. *Sous les notations et hypothèses ci-dessus, supposons que $U(k) \neq \varnothing$, et qu'il existe des torseurs universels de n-torsion $\mathcal{T}_U$, $\mathcal{T}_V$ comme ci-dessus. Soit $u \in U(k)$. Alors, pour tout k-groupe fini commutatif S avec $n \cdot S = 0$, on a un isomorphisme*

$$H^2_u(U, S) \oplus H^2(V, S) \oplus \mathrm{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*, \varepsilon')} H^2(U \times V, S).$$

Démonstration. Considérons le morphisme dans $D^+(k)$

$$\psi := (p_1^* + p_2^*, u^* + 0) : Rq_{1,*}S \oplus Rq_{2,*}S \to (R(q_1 \circ p_1)_*S) \oplus S.$$

D'après le théorème 2.1, le cône C_ψ de ψ est dans $D^{\geq 2}(k)$ et la composition

$$\mathrm{Hom}_{k_s}(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{\varepsilon'|_{k_s}} H^2(U_{k_s} \times V_{k_s}, S) = \mathcal{H}^2(R(q_1 \circ p_1)_*S) \to \mathcal{H}^2(C_\psi) \tag{2-2}$$

est un isomorphisme. Ceci induit une suite exacte

$$0 \to H^2_u(U, S) \oplus H^2(V, S) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} H^2(U \times V, S) \to H^0(k, \mathcal{H}^2(C_\psi)).$$

D'après (2-2), la composition

$$\mathrm{Hom}_k(S_U \otimes_{\mathbb{Z}/n} S_V, S) \xrightarrow{\varepsilon'} H^2(U \times V, \mu_n) \to H^0(k, \mathcal{H}^2(C_\psi))$$

est un isomorphisme, d'où le résultat. □

Le corollaire 2.2 et la remarque 1.2 donnent directement [Cao 2020, corollaire 2.7].

Remarque 2.3. Lv [2020] utilise [Cao 2020, proposition 2.6] pour établir son lemme 3.3. Dans sa démonstration, cette proposition 2.6 peut être remplacée par le théorème 2.1 ci-dessus. Donc tous les résultats de [Lv 2020] restent corrects (sauf le lemme 3.2).

Bibliographie

[Cao 2020] Y. Cao, "Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée", *Algebra Number Theory* **14**:8 (2020), 2151–2183. MR Zbl

[Colliot-Thélène et Skorobogatov 2021] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The Brauer–Grothendieck group*, Ergebnisse der Math. (3) **71**, Springer, 2021. MR Zbl

[Fu 2011] L. Fu, *Étale cohomology theory*, Nankai Tracts in Mathematics **13**, World Sci., Hackensack, NJ, 2011. MR Zbl

[Lv 2020] C. Lv, "A note on the Brauer group and the Brauer–Manin set of a product", *Bull. Lond. Math. Soc.* **52**:5 (2020), 932–941. MR Zbl

[SGA 4½ 1977] P. Deligne, *Cohomologie étale* (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie), Lecture Notes in Math. **569**, Springer, 1977. MR Zbl

[Skorobogatov et Zarhin 2014] A. N. Skorobogatov et Y. G. Zarhin, "The Brauer group and the Brauer–Manin set of products of varieties", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*) **16**:4 (2014), 749–769. Corrigé à https://www.ma.ic.ac.uk/~anskor/corrigendum_final.pdf. MR Zbl

Communicated by Bjorn Poonen
Received 2021-12-02 Revised 2022-03-07 Accepted 2022-04-11

yangcao1988@ustc.edu.cn
School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, China

Algebra & Number Theory

msp.org/ant

See inside back cover or msp.org/ant for submission instructions.

The subscription price for 2023 is US $485/year for the electronic version, and $705/year (+$65, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

ANT peer review and production are managed by EditFLOW® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Algebra & Number Theory

Volume 17 No. 1 2023