Algebra & Number Theory

Volume 18
2024
No. 2

Sur les espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii

Nguyễn Mạnh Linh

msp

ALGEBRA AND NUMBER THEORY 18:2 (2024)
https://doi.org/10.2140/ant.2024.18.349

Sur les espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii

Nguyễn Mạnh Linh

Nous établissons le principe de Hasse et l'approximation faible pour certains espaces homogènes de SL_m à stabilisateur géométrique nilpotent de classe 2, construits par Borovoi et Kunyavskii. Ces espaces homogènes vérifient donc une conjecture de Colliot-Thélène concernant l'obstruction de Brauer–Manin pour les variétés géométriquement rationnellement connexes.

We establish the Hasse principle and the weak approximation property for certain homogeneous spaces of SL_m whose geometric stabilizer is of nilpotency class 2, which were constructed by Borovoi and Kunyavskii. These homogeneous spaces verify thus a conjecture of Colliot-Thélène on the Brauer–Manin obstruction for geometrically rationally connected varieties.

1. Introduction

1A. ***Intérêt du problème.*** Soit X une variété lisse définie sur un corps de nombres k. On dira que X est un contre-exemple au principe de Hasse si X possède des points locaux dans tous les complétés k_v de k mais $X(k) = \varnothing$. Manin [1971] a introduit une méthode générale pour l'étude des obstructions à l'existence de k-points sur X : à X on associe le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, X$ et l'on considère l'*accouplement de Brauer–Manin*

$$\prod_v X(k_v) \times \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, X, \quad \langle (P_v)_v, A\rangle_{\mathrm{BM}} = \sum_v \mathrm{inv}_v(A(P_v)), \tag{1-1}$$

où v parcourt les places de k, et où $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\, k_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ désigne l'invariant local. Notant $\mathrm{Br}_0\, X = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, X)$, on voit par la loi de réciprocité globale que l'accouplement (1-1) se factorise par $(\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, X)/(\mathrm{Br}_0\, X)$.

MSC2020 : 11R34, 14G05, 14G12.
Mots-clefs : Galois cohomology, lien, nonabelian cohomology, homogeneous spaces, rational points, Hasse principle, weak approximation, Brauer–Manin obstruction.

On plonge $X(k)$ diagonalement dans $\prod_v X(k_v)$. Alors l'adhérence de $X(k)$ (pour la topologie produit) est contenue dans l'ensemble (fermé) $\left(\prod_v X(k_v)\right)^{\mathrm{Br}}$ des familles de points locaux de X qui sont orthogonales à $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} X$ par rapport à l'accouplement (1-1). Si $X(k) \neq \varnothing$, on dira que l'*obstruction de Brauer–Manin à l'approximation faible pour X est la seule* si $X(k)$ est dense dans $\left(\prod_v X(k_v)\right)^{\mathrm{Br}}$. On dira que l'*obstruction de Brauer–Manin au principe de Hasse est la seule* pour une classe $\mathscr{X}$ de variétés lisses sur k si pour toute variété $X \in \mathscr{X}$, $\left(\prod_v X(k_v)\right)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ entraîne $X(k) \neq \varnothing$. Notons que ces deux propriétés sont des invariants birationnels stables.

Une conjecture de Colliot-Thélène [Colliot-Thélène et Skorobogatov 2021, Conjecture 14.1.2] prédit que l'obstruction de Brauer–Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires. À la suite du travail de Demarche et Lucchini Arteche [2019], le cas général se réduit au cas où le groupe ambiant est SL_m et où le stabilisateur géométrique est fini. On sait que cette conjecture vaut si le stabilisateur est abélien [Borovoi 1996, Theorem 2.2] : dans ce cas l'obstruction à l'existence de k-points sur X est en fait contrôlée par un morphisme $Б(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, où $Б(X)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} X/\mathrm{Br}_0 X)$, c'est la *première obstruction de Brauer–Manin* de X. Dans le cas où le stabilisateur géométrique n'est pas abélien, on ne sait pas si le groupe $Б(X)$ est suffisant pour expliquer le défaut du principe de Hasse. Borovoi et Kunyavskii ont essayé [1997] de construire un espace homogène où l'obstruction par rapport à $Б(X)$ ne suffit pas, mais il s'avère que cette construction ne marche pas [Borovoi et Kunyavskii 2001]. Nous allons, dans ce texte, étudier leur construction (qu'on va appeler *espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii*), et notamment nous montrons que ces espaces homogènes vérifient toujours le principe de Hasse ainsi que l'approximation faible ; ils vérifient donc la conjecture de Colliot-Thélène mentionnée ci-dessus (en fait il n'y pas d'obstruction de Brauer–Manin pour ceux-ci).

Il est à noter qu'un résultat récent de Harpaz et Wittenberg [2020, théorème B] dit que la conjecture de Colliot-Thélène vaut si le stabilisateur géométrique est *hyper-résoluble* (en tant que groupe fini muni d'une action extérieure du groupe de Galois absolu). Cela n'est pas toujours le cas pour les espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii (voir le corollaire 1.3 ci-dessous), malgré le fait que les stabilisateurs de ceux-ci sont nilpotents (un groupe *abstrait* fini et nilpotent est toujours hyper-résoluble, mais ce n'est pas le cas pour les groupes algébriques finis).

1B. ***Notations et conventions.*** On va fixer dans ce texte quelques notations.

Si K est un corps parfait, $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est le groupe de Galois absolu de K.

Soit K un corps de caractéristique nulle. Si F est un K-groupe fini (un schéma en groupes fini sur $\operatorname{Spec} K$), on l'identifiera au groupe abstrait $F(\overline{K})$ muni de l'action naturelle de Γ_K. On note aussi $\hat{F} = \mathrm{Hom}(F, \overline{K}^{\times})$ le Γ_K-module des caractères de F.

Lorsque F est un groupe abstrait ou un schéma en groupes, on note $[F, F]$ son sous-groupe dérivé, $F^{\mathrm{ab}} = F/[F, F]$ son abélianisé, $Z(F)$ son centre, $\mathrm{Aut}(F)$ son groupe des automorphismes (en tant que groupe abstrait), $\mathrm{Int}(F) = F/Z(F)$ son groupe des automorphismes intérieurs, $\mathrm{int}(f) \in \mathrm{Int}(F)$

la conjugaison par un élément $f \in F$, et $\mathrm{Out}(F) = \mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Int}(F)$ son groupe des automorphismes extérieurs. Si F est un groupe fini et Γ est un groupe profini, une action (resp. *action extérieure*) de Γ sur F est un morphisme *continu* (i.e., localement constant) de Γ dans $\mathrm{Aut}(F)$ (resp. dans $\mathrm{Out}(F)$).

Rappelons la notion de groupe fini hyper-résoluble au sens de Harpaz–Wittenberg [2020, définition 6.4]. Soit $\kappa : \Gamma \to \mathrm{Out}(F)$ une action extérieure d'un groupe profini Γ sur un groupe fini F. Un sous-groupe distingué G de F est dit stable sous κ si pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe un relevé $\phi \in \mathrm{Aut}(F)$ de $\kappa(\sigma)$ tel que $\phi(G) \subseteq G$ (dans ce cas, comme G est un sous-groupe distingué de F, tous les relevés de $\kappa(\sigma)$ vérifient cette propriété). On dit que F (muni de l'action extérieure κ) est hyper-résoluble s'il existe un entier n et une suite

$$\{1\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = F$$

de sous-groupes distingués de F, stables sous κ, tels que F_i/F_{i-1} soit cyclique pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il est clair que dans ce cas, pour tout sous-groupe distingué G de F qui est stable sous κ, le quotient F/G muni de l'action extérieure de Γ induite par κ est également hyper-résoluble [1].

Les cohomologies utilisées seront cohomologie de groupes profinis, cohomologie galoisienne et cohomologie étale. On dispose aussi de la notion des H^0 et H^1 non abéliens. Le H^2 non abélien, défini dans [Flicker et al. 1998, § 1], sera mentionné dans le paragraphe 3A.

Si G est un groupe et H est un sous-groupe distingué de G, l'image d'un élément $\sigma \in G$ dans G/H sera notée $\bar{\sigma}$. Pour tout $r \geqslant 1$, l'image dans H^r d'un r-cocycle a de Z^r sera notée $[a]$.

Si G est un groupe abstrait et $P \subseteq G$, $\langle P\rangle$ désigne le sous-groupe de G (algébriquement) engendré par P. Si de plus G est supposé topologique, l'adhérence $\overline{\langle P\rangle}$ est le sous-groupe de G topologiquement engendré par P.

Soit k un corps de nombres. L'ensemble des places de k sera noté Ω_k. Si A est un Γ_k-module, r est un entier et $v \in \Omega_k$, on notera $\mathrm{loc}_v : \mathrm{H}^r(k, A) \to \mathrm{H}^r(k_v, A)$ le morphisme de localisation, et $\alpha_v = \mathrm{loc}_v(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{H}^r(k, A)$. De plus, on définit les sous-groupes

$$Ш^r_S(k, A) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^r(k, A) \to \prod_{v \in \Omega_k \setminus S} \mathrm{H}^r(k_v, A)\right)$$

pour tout sous-ensemble fini $S \subseteq \Omega_k$, et

$$Ш^r_\omega(k, A) := \bigcup_S Ш^r_S(k, A), \qquad Ш^r(k, A) := Ш^r_\varnothing(k, A).$$

Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps K de caractéristique nulle. Le groupe de Brauer de X est toujours le groupe de Brauer–Grothendieck $\mathrm{Br}\, X := \mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m)$. Le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, X$ est le groupe de Brauer de n'importe quelle variété propre et lisse contenant X comme un ouvert dense ; c'est naturellement un sous-groupe de $\mathrm{Br}\, X$, et c'est un invariant birationnel stable [Colliot-Thélène et Skorobogatov 2021, § 6.2]. Si K est un corps, le groupe de Brauer de K est alors $\mathrm{Br}\, K = \mathrm{H}^2(K, \mathbb{G}_m)$. Notons que $\mathrm{H}^2(K, \mu_n) = (\mathrm{Br}\, K)[n]$ pour tout entier n. Dans le cas où K est un corps

1. Attention, κ n'induit pas forcément une action extérieure de Γ sur G.

p-adique ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathrm{inv}_K : \mathrm{Br}\, K \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ désigne l'invariant local. Si k un corps de nombres et v est une place de k, on notera $\mathrm{inv}_v = \mathrm{inv}_{k_v}$.

Rappelons aussi l'interprétation cohomologique suivante de l'approximation faible, dont la preuve peut se trouver par exemple dans [Harari 2007, § 1.2].

Lemme 1.1. *Soient k un corps de nombres et F un k-groupe fini. On choisit un plongement $F \hookrightarrow \mathrm{SL}_m$ de k-groupes et l'on pose $X = F \backslash \mathrm{SL}_m$. Alors pour tout sous-ensemble fini $S \subseteq \Omega_k$, on a équivalence entre :*

1. *$X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$.*
2. *La restriction $\mathrm{H}^1(k, F) \to \prod_{v \in S} \mathrm{H}^1(k_v, F)$ est surjective.*

1C. *Énoncés des principaux théorèmes.* Soit k un corps de nombres. On rappelle la construction de Borovoi–Kunyavskii. On construit une extension centrale de k-groupes finis

$$0 \to Z \to F \to M \oplus M \to 0 \tag{1-2}$$

avec $Z = Z(F) = [F, F]$ (donc F est nilpotent de classe 2) et on considère les espaces homogènes X de SL_m à stabilisateur géométrique F. Dans le paragraphe 3, cette construction sera discutée en détail. Pour le stabilisateur F comme dans les théorèmes A et B ci-dessous, on verra dans le paragraphe 4 qu'il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin pour ces espaces homogènes X : leurs groupes de Brauer non ramifiés sont réduits aux constantes (proposition 5.4).

Voici les principaux résultats de ce texte.

Théorème A. *Soient A un groupe abélien fini, k un corps de nombres contenant $\mu_{\exp(A)}$, L/k une extension finie galoisienne, $M = \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} A$, $j : A \otimes A \hookrightarrow M \otimes M$ l'inclusion canonique, Z le conoyau de j et $\phi : M \otimes M \to Z$ la projection. On définit l'application biadditive*

$$\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z, \quad \Phi((x, y), (x', y')) = \phi(x \otimes y'),$$

vue comme 2-cocycle normalisé sur $M \oplus M$ à coefficients dans Z (muni de l'action triviale de $M \oplus M$) et soit F le produit croisé $Z \times_\Phi (M \oplus M)$, muni de l'action coordonnée par coordonnée de Γ_k. Alors les espaces homogènes de SL_m de lien de Springer $\mathrm{lien}(F)$ (voir paragraphe 3A pour la définition du lien de Springer d'un espace homogène) vérifient le principe de Hasse.

Théorème B. *Avec les mêmes hypothèses du théorème A, soit X un espace homogène de SL_m de lien de Springer $\mathrm{lien}(F)$. Si $X(k) \neq \varnothing$, alors X vérifie l'approximation faible.*

Les théorèmes A et B seront démontrés dans les paragraphes 5C et 5D. Leurs preuves reposent sur des calculs cohomologiques : comme $M = \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} A$, on peut utiliser le lemme de Shapiro pour passer de $\mathrm{H}^r(k, M)$ à $\mathrm{H}^r(L, A)$. La compatibilité avec l'isomorphisme de Shapiro de certaines applications sera donc nécessaire, et nous allons en discuter au paragraphe 2.

Pour toute extension K de k, la flèche connectante $\Delta : \mathrm{H}^1(K, M \oplus M) \to \mathrm{H}^2(K, Z)$ induite par l'extension centrale (1-2) s'exprime en termes de cup-produits (voir lemme 3.8). Cette observation importante nous permet de réduire le problème des points rationnels sur X aux calculs cohomologiques.

L'argument clé sera le théorème 5.5, qui est lui-même une application d'un « lemme arithmétique », les propositions 5.1 et 5.2 du paragraphe 5A. Ces propositions sont des généralisations de [Serre 1970, chapitre III, §2.2, théorème 4], qui décrivent une propriété globale du symbole de Hilbert, et dont les démonstrations reposent sur la dualité de Poitou–Tate.

Montrons que le stabilisateur des espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii comme dans l'énoncé du théorème A n'est pas toujours hyper-résoluble au sens de Harpaz–Wittenberg.

Lemme 1.2. *Soit $\mathfrak{g}$ le groupe cyclique $\langle g : g^3 = 1\rangle$ et soit $M = (\mathbb{Z}/2)[\mathfrak{g}] = \bigoplus_{i=0}^{2} (\mathbb{Z}/2)e_i$. Alors le quotient $\overline{M} = M/(e_0 + e_1 + e_2)$ est un $\mathfrak{g}$-module simple mais pas un groupe cyclique.*

Démonstration. Le groupe $\overline{M}$ est bien un $\mathfrak{g}$-module puisque $e_0 + e_1 + e_2 \in M$ est fixé par $\mathfrak{g}$. Il est d'ordre 4 et d'exposant 2 donc non cyclique. Montrons qu'il est un $\mathfrak{g}$-module simple. Soit $N \subseteq \overline{M}$ un sous-groupe $\mathfrak{g}$-stable et supposons $N \neq 0$. Soit $x \in N \setminus \{0\}$ et affirmons que x n'est pas fixé par $\mathfrak{g}$. En effet, on peut écrire $x = \overline{a_1 e_1 + a_2 e_2}$, où $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/2$. Alors ${}^g x = \overline{a_1 e_0 + a_2 e_1}$. Si ${}^g x = x$, alors il existe $b \in \mathbb{Z}/2$ tel que $a_1 e_0 + a_2 e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + b(e_0 + e_1 + e_2)$, d'où

$$a_1 = b, \quad a_2 = a_1 + b, \quad a_2 + b = 0,$$

et donc $a_1 = a_2 = 0$, ou $x = 0$. Cette contradiction montre qu'en fait on a ${}^g x \neq x$. On en déduit que N contient quatre éléments deux à deux distincts, à savoir 0, x, ${}^g x$ et ${}^{g^2} x$. Comme $\overline{M}$ est d'ordre 4, on voit que $N = \overline{M}$, ce qui montre que $\overline{M}$ n'a pas de sous-groupe $\mathfrak{g}$-stable non trivial. □

Corollaire 1.3. *Soit L/k une extension galoisienne de degré 3 de corps de nombres et $M = \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} \mu_2$. De M, on construit le k-groupe fini F comme dans l'énoncé du théorème A. Alors F n'est pas hyper-résoluble (en tant que groupe fini muni de l'action extérieure de Γ_k).*

Démonstration. En effet, si F était hyper-résoluble, alors $M \oplus M = F/Z$ serait un Γ_k-module hyper-résoluble. On en déduirait que ce serait aussi le cas pour M et le quotient $\overline{M}$ comme dans le lemme 1.2. Mais $\overline{M}$ est un Γ_k-module simple non cyclique, donc non hyper-résoluble. Ainsi, F n'est pas hyper-résoluble. □

2. Compatibilité avec les isomorphismes de Shapiro

Dans cette section, G est un groupe profini et H est un sous-groupe ouvert, distingué de G.

Soit r un entier. On rappelle que si A est un groupe abélien muni de l'action triviale de H, le groupe $\mathrm{Z}^r(H, A)$ des r-cocycles $H^r \to A$ est muni de l'action suivante de G :

$${}^{\sigma} a_{\tau_1,\dots,\tau_r} = a_{\sigma^{-1}\tau_1\sigma,\dots,\sigma^{-1}\tau_r\sigma} \quad \forall \sigma \in G,\ \forall a \in \mathrm{Z}^r(H, A),\ \forall \tau_1, \dots, \tau_r \in H.$$

Cette action induit une action de G sur le groupe $\mathrm{H}^r(H, A)$. Le groupe H agit trivialement sur $\mathrm{H}^r(H, A)$ puisque les automorphismes intérieurs de H induisent l'identité. On obtient ainsi une action de G/H sur $\mathrm{H}^r(H, A)$. Pour le reste de cette section, soit $M = \mathrm{Ind}_G^H A$ (voir [Serre 1994, chapitre I, §2.5] pour la notion de module induit). Alors M est un G-module discret dont le groupe abélien sous-jacent est celui des applications $G/H \to A$, et dont l'action de G est donnée par la formule

$$^{\sigma}f(g) = f(g\bar{\sigma}) \quad \forall \sigma \in G,\ \forall f \in M,\ \forall g \in G/H.$$

Pour tout $r \geqslant 1$, on dispose d'un morphisme

$$\mathrm{sh} : \mathrm{Z}^r(G, M) \to \mathrm{Z}^r(H, A)$$

qui à chaque r-cocycle $a : G^r \to M$ associe le r-cocycle

$$H^r \to A, \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \mapsto a_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(1).$$

Le lemme de Shapiro affirme que sh induit un isomorphisme $\mathrm{sh} : \mathrm{H}^r(G, M) \to \mathrm{H}^r(H, A)$. Le but de cette section est de donner quelques résultats de compatibilité des isomorphismes de Shapiro avec certaines applications.

2A. ***Quasi-inverses aux applications de Shapiro.*** On fixe une section (ensembliste) $u : G/H \to G$ avec $u(1) = 1$. Pour tous $g \in G/H$ et $\sigma \in G$, posons $\gamma(g, \sigma) := u(g)\sigma u(g\bar{\sigma})^{-1}$. Alors $\gamma(g, \sigma) \in H$ puisque son image dans G/H est $g\bar{\sigma}(g\bar{\sigma})^{-1} = 1$. L'application $\gamma : G/H \times G \to H$ est continue. Elle vérifie une « condition de cocycle » :

$$\gamma(g, \sigma\tau) = \gamma(g, \sigma)\gamma(g\bar{\sigma}, \tau) \quad \forall g \in G/H,\ \forall \sigma, \tau \in G. \tag{2-1}$$

Les résultats suivants décrivent des morphismes $\mathrm{Z}^r(H, A) \to \mathrm{Z}^r(G, M)$ pour $r = 1, 2$, qui induisent des inverses de sh au niveau de la cohomologie. Ils sont inspirés par [Naidu 2007, Lemma 2.1, Lemma 2.2].

Lemme 2.1. *Soit $a \in \mathrm{H}^1(H, A)$, vu comme morphisme continu $H \to A$. Soit $x : G \to M$ l'application continue définie par*

$$x_\sigma(g) = a_{\gamma(g,\sigma)} \quad \forall \sigma \in G,\ \forall g \in G/H.$$

Alors x est un 1-cocycle. De plus, pour tous $\sigma \in H$ et $g \in G/H$, on a $x_\sigma(g) = {}^{u(g)^{-1}}a_\sigma$. En particulier, $\mathrm{sh}(x) = a$.

Démonstration. Pour tous $g \in G/H$ et $\sigma, \tau \in G$, au vu de (2-1), on a

$$x_{\sigma\tau}(g) = a_{\gamma(g,\sigma\tau)} = a_{\gamma(g,\sigma)\gamma(g\bar{\sigma},\tau)} = a_{\gamma(g,\sigma)} + a_{\gamma(g\bar{\sigma},\tau)} = x_\sigma(g) + x_\tau(g\bar{\sigma}) = x_\sigma(g) + {}^{\sigma}x_\tau(g),$$

d'où $x_{\sigma\tau} = x_\sigma + {}^{\sigma}x_\tau$, donc x est bien un 1-cocycle.

Soient $\sigma \in H$ et $g \in G/H$. Alors $\gamma(g, \sigma) = u(g)\sigma u(g\bar{\sigma})^{-1} = u(g)\sigma u(g)^{-1}$, d'où

$$x_\sigma(g) = a_{u(g)\sigma u(g)^{-1}} = {}^{u(g)^{-1}}a_\sigma.$$

En particulier, $x_\sigma(1) = a_\sigma$ puisque $u(1) = 1$ et donc $\mathrm{sh}(x) = a$. $\square$

Lemme 2.2. *Soit $a \in \mathrm{Z}^2(H, A)$. Soit $x : G \times G \to M$ l'application continue définie par*

$$x_{\sigma,\tau}(g) = a_{\gamma(g,\sigma),\gamma(g\bar{\sigma},\tau)} \quad \forall \sigma, \tau \in G,\ \forall g \in G/H.$$

Alors x est un 2-cocycle. De plus, pour tous $\sigma, \tau \in H$ et $g \in G/H$, on a $x_{\sigma,\tau}(g) = {}^{u(g)^{-1}}a_{\sigma,\tau}$. En particulier, $\mathrm{sh}(x) = a$.

Démonstration. Pour tous $g \in G/H$ et $\sigma, \tau, \upsilon \in G$, on a

$$\begin{aligned}
&{}^{\sigma}x_{\tau,\upsilon}(g) - x_{\sigma\tau,\upsilon}(g) + x_{\sigma,\tau\upsilon}(g) - x_{\sigma,\tau}(g)\\
&\qquad = x_{\tau,\upsilon}(g\bar{\sigma}) - x_{\sigma\tau,\upsilon}(g) + x_{\sigma,\tau\upsilon}(g) - x_{\sigma,\tau}(g)\\
&\qquad = a_{\gamma(g\bar{\sigma},\tau),\gamma(g\overline{\sigma\tau},\upsilon)} - a_{\gamma(g,\sigma\tau),\gamma(g\overline{\sigma\tau},\upsilon)} + a_{\gamma(g,\sigma),\gamma(g\bar{\sigma},\tau\upsilon)} - a_{\gamma(g,\sigma),\gamma(g\bar{\sigma},\tau)}\\
&\qquad \overset{(2\text{-}1)}{=} a_{\gamma(g\bar{\sigma},\tau),\gamma(g\overline{\sigma\tau},\upsilon)} - a_{\gamma(g,\sigma)\gamma(g\bar{\sigma},\tau),\gamma(g\overline{\sigma\tau},\upsilon)} + a_{\gamma(g,\sigma),\gamma(g\bar{\sigma},\tau)\gamma(g\overline{\sigma\tau},\upsilon)} - a_{\gamma(g,\sigma),\gamma(g\bar{\sigma},\tau)}\\
&\qquad = 0,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que a est un 2-cocycle. De là, ${}^{\sigma}x_{\tau,\upsilon} - x_{\sigma\tau,\upsilon} + x_{\sigma,\tau\upsilon} - x_{\sigma,\tau} = 0$ et donc x est bien un 2-cocycle.

Soient $\sigma, \tau \in H$ et $g \in G/H$. Alors $\gamma(g,\sigma) = u(g)\sigma u(g\bar{\sigma})^{-1} = u(g)\sigma u(g)^{-1}$ et $\gamma(g\bar{\sigma},\tau) = u(g\bar{\sigma})\tau u(g\overline{\sigma\tau})^{-1} = u(g)\tau u(g)^{-1}$, d'où

$$x_{\sigma,\tau}(g) = a_{u(g)\sigma u(g)^{-1},u(g)\tau u(g)^{-1}} = {}^{u(g)^{-1}}a_{\sigma,\tau}.$$

En particulier, $x_{\sigma,\tau}(1) = a_{\sigma,\tau}$ puisque $u(1) = 1$ et donc $\mathrm{sh}(x) = a$. □

2B. *Description globale.* À partir de ce paragraphe, on identifie $M \otimes M$ au groupe des applications $G/H \times G/H \to A \otimes A$, muni de l'action de G définie par

$${}^{\sigma}f(g,h) = f(g\bar{\sigma}, h\bar{\sigma}) \quad \forall \sigma \in G,\ \forall f \in M \otimes M,\ \forall g, h \in G/H.$$

Alors pour tous $f_1, f_2 \in M$, l'élément $f_1 \otimes f_2 \in M \otimes M$ est donné par

$$(f_1 \otimes f_2)(g,h) = f_1(g) \otimes f_2(h) \quad \forall g, h \in G/H.$$

Pour tout $g \in G/H$, on définit le morphisme

$$\omega_g : M \otimes M \to \mathrm{Ind}_G^H(A \otimes A) = \{G/H \to A \otimes A\}, \quad \omega_g(f)(h) = f(gh, h). \tag{2-2}$$

On vérifie sans peine que ω_g est G-équivariant. Soit $\omega = (\omega_g)_{g \in G/H} : M \otimes M \to (\mathrm{Ind}_G^H(A \otimes A))^{[G:H]}$. Explicitons la composée $\mathrm{sh}' = \mathrm{sh}^{[G:H]} \circ \omega_* : \mathrm{Z}^r(G, M \otimes M) \to \mathrm{Z}^r(H, A \otimes A)^{[G:H]}$ pour tout $r \geqslant 1$.

Lemme 2.3. *Soit $r \geqslant 1$.*

1. *ω est un isomorphisme de G-modules (donc $\mathrm{sh}' : \mathrm{H}^r(G, M \otimes M) \to \mathrm{H}^r(H, A \otimes A)^{[G:H]}$ est un isomorphisme).*

2. *Soit $x \in \mathrm{Z}^r(G, M \otimes M)$. Pour tout $g \in G/H$, soit $a_g \in \mathrm{Z}^r(H, A \otimes A)$ le r-cocycle $(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \mapsto x_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(g, 1)$. Alors $\mathrm{sh}'(x) = (a_g)_{g\in G/H}$.*

Démonstration. 1. Montrons l'injectivité de ω. Soit $f \in M \otimes M$ tel que $\omega(f) = 0$. Alors

$$f(g, h) = f(gh^{-1}h, h) = \omega_{gh^{-1}}(f)(h) = 0$$

pour tous $g, h \in G/H$, d'où $f = 0$.

Montrons maintenant que ω est surjectif. Soit alors $(f_g)_{g\in G/H}$ une famille d'applications $G/H \to A\otimes A$. On définit l'élément $f \in M \otimes M$ par

$$f(g, h) = f_{gh^{-1}}(h) \quad \forall g, h \in G/H.$$

Pour tous $g, h \in G/H$, on a $\omega_g(f)(h) = f(gh, h) = f_{ghh^{-1}}(h) = f_g(h)$, d'où $\omega_g(f) = f_g$ et donc $\omega(f) = (f_g)_{g\in G/H}$.

2. Pour tous $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in H$ et $g \in G/H$, on a

$$((\omega_g)_* x)_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(1) = \omega_g(x_{\sigma_1,\dots,\sigma_r})(1) = x_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(g, 1) = (a_g)_{\sigma_1,\dots,\sigma_r},$$

donc $\mathrm{sh}((\omega_g)_* x) = a_g$, d'où $\mathrm{sh}'(x) = (\mathrm{sh}((\omega_g)_* x))_{g\in G/H} = (a_g)_{g\in G/H}$. □

Décrivons l'application $\mathrm{H}^1(H, A) \times \mathrm{H}^1(H, A) \to \mathrm{H}^2(H, A \otimes A)^{[G:H]}$ associée au cup-produit

$$\cup : \mathrm{H}^1(G, M) \times \mathrm{H}^1(G, M) \to \mathrm{H}^2(G, M \otimes M).$$

Lemme 2.4. *On a un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(H, A) \times \mathrm{H}^1(H, A) \arrow[r, "(a,b)\mapsto ({}^{g^{-1}}a\cup b)_{g\in G/H}"] & \mathrm{H}^2(H, A \otimes A)^{[G:H]} \\
\mathrm{H}^1(G, M) \times \mathrm{H}^1(G, M) \arrow[u, "\mathrm{sh}\times\mathrm{sh}"] \arrow[r, "\cup"] & \mathrm{H}^2(G, M \otimes M) \arrow[u, "\mathrm{sh}'"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathrm{H}^1(H, A)$, vus comme morphismes continus $H \to A$. Soient $x, y : G \to M$ les 1-cocycles représentant les classes $\mathrm{sh}^{-1}(a), \mathrm{sh}^{-1}(b) \in \mathrm{H}^1(G, M)$ respectivement, qui sont construits dans le lemme 2.1. Alors l'on a $x_\sigma(g) = {}^{u(g)^{-1}}a_\sigma$ et $y_\sigma(g) = {}^{u(g)^{-1}}b_\sigma$ pour tous $\sigma \in H$ et $g \in G/H$ (où $u(g) \in G$ désigne un relevé de g).

Regardons le cup-produit $x \cup y \in \mathrm{Z}^2(G, M \otimes M)$. Pour tous $g \in G/H$ et $\sigma, \tau \in H$, on a

$$(x \cup y)_{\sigma,\tau}(g, 1) = (x_\sigma \otimes {}^\sigma y_\tau)(g, 1) = (x_\sigma \otimes y_\tau)(g, 1) = x_\sigma(g) \otimes y_\tau(1) = {}^{u(g)^{-1}}a_\sigma \otimes b_\tau = ({}^{u(g)^{-1}}a \cup b)_{\sigma,\tau}.$$

Par le lemme 2.3, on a $\mathrm{sh}'(x \cup y) = ({}^{u(g)^{-1}}a \cup b)_{g\in G/H}$ dans $\mathrm{Z}^2(H, A \otimes A)^{[G:H]}$, ce qui implique que $\mathrm{sh}'([x] \cup [y]) = ({}^{g^{-1}}a \cup b)_{g\in G/H}$ dans $\mathrm{H}^2(G, A \otimes A)^{[G:H]}$, d'où le lemme. □

Lemme 2.5. *On munit A de l'action triviale de G. Soit $j : A\otimes A \hookrightarrow M\otimes M$ l'inclusion G-équivariante qui à tout $m \in A\otimes A$ associe l'application*

$$G/H \times G/H \to A\otimes A, \quad (g,h) \mapsto m.$$

Soit $r \geqslant 1$ et soit $\mathrm{res} : \mathrm{Z}^r(G, A\otimes A) \to \mathrm{Z}^r(H, A\otimes A)$ *le morphisme de restriction. Alors l'on dispose d'un diagramme commutatif, où la flèche verticale est un isomorphisme* :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^r(G, A\otimes A) \arrow[r, "(\mathrm{res},\dots,\mathrm{res})"] \arrow[dr, "j_*"'] & \mathrm{H}^r(H, A\otimes A)^{[G:H]} \\ & \mathrm{H}^r(G, M\otimes M) \arrow[u, "\mathrm{sh}'"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Z}^r(G, A\otimes A)$. Alors $(j_*x)_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(g,1) = j(x_{\sigma_1,\dots,\sigma_r})(g,1) = x_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}$ pour tous $\sigma_1,\dots,\sigma_r \in H$ et $g \in G/H$. Par le lemme 2.3, on a $\mathrm{sh}'(j_*x) = (\mathrm{res}(x),\dots,\mathrm{res}(x))$ dans $\mathrm{Z}^r(H, A\otimes A)^{[G:H]}$ et donc $\mathrm{sh}'(j_*[x]) = (\mathrm{res}([x]),\dots,\mathrm{res}([x]))$ dans $\mathrm{H}^r(H, A\otimes A)^{[G:H]}$. □

2C. *Description locale.* Dans ce paragraphe et celui qui le suit, on prend $G = \Gamma_k$ et $H = \Gamma_L$, où L/k est une extension finie galoisienne de corps de nombres. Posons $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(L/k) = \Gamma_k/\Gamma_L$. A est toujours groupe abélien muni de l'action triviale de Γ_L et $M = \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} A$.

On fixe une place v de k, une place w de L divisant v et une extension de w à $\bar{k}$ (d'où une inclusion $\Gamma_{k_v} \subseteq \Gamma_k$ avec $\Gamma_{L_w} = \Gamma_{k_v} \cap \Gamma_L$). Soit $\mathfrak{g}_v = \mathrm{Gal}(L_w/k_v) = \Gamma_{k_v}/\Gamma_{L_w} \subseteq \mathfrak{g}$ le groupe de décomposition de $w|v$. On choisit un système de représentants $\mathscr{E}_v$ des classes à gauche de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{g}_v$ et l'on pose $e_v = |\mathscr{E}_v| = [\mathfrak{g} : \mathfrak{g}_v]$. Alors toute place de L divisant v est de la forme sw pour un unique $s \in \mathscr{E}_v$.

Posons $M_v = \mathrm{Ind}_{\Gamma_{k_v}}^{\Gamma_{L_w}} A = \{\mathfrak{g}_v \to A\}$. Pour tout $s \in \mathscr{E}_v$, soit $\varsigma_s : M \to M_v$ le morphisme Γ_{k_v}-équivariant défini par

$$\varsigma_s(f)(h) = f(sh) \quad \forall f \in M,\ \forall h \in \mathfrak{g}_v.$$

Soit $\varsigma = (\varsigma_s)_{s\in\mathscr{E}_v} : M \to M_v^{e_v}$ et soit $\mathrm{sh}_v = \mathrm{sh}^{e_v} \circ \varsigma_* : \mathrm{Z}^r(k_v, M) \to \mathrm{Z}^r(L_w, A)^{e_v}$ pour tout $r \geqslant 1$.

Lemme 2.6. *ς est un isomorphisme de Γ_{k_v}-modules (donc $\mathrm{sh}_v : \mathrm{H}^r(k_v, M) \to \mathrm{H}^r(L_w, A)^{e_v}$ est un isomorphisme pour tout $r \geqslant 1$).*

Démonstration. Montrons l'injectivité de ς. Soit $f \in M$ tel que $\varsigma(f) = 0$. Pour tout $g \in \mathfrak{g}$, on peut écrire $g = sh$, où $s \in \mathscr{E}_v$ et $h \in \mathfrak{g}_v$. Alors $f(g) = f(sh) = \varsigma_s(f)(h) = 0$, d'où $f = 0$.

Montrons maintenant que ς est surjectif. Soit alors $(f_s)_{s\in\mathscr{E}_v}$ une famille d'éléments de M_v. On définit l'élément $f \in M$ comme suit. Pour tout $g \in \mathfrak{g}$, il existe un unique $s \in \mathscr{E}_v$ et un unique $h \in \mathfrak{g}_v$ tel que $g = sh$. On définit $f(g) = f_s(h)$. Alors l'on a $\varsigma_s(f)(h) = f(sh) = f_s(h)$ pour tous $s \in \mathscr{E}_v$ et $h \in \mathfrak{g}$, d'où $\varsigma_s(f) = f_s$ et donc $\varsigma(f) = (f_s)_{s\in\mathscr{E}_v}$. □

Par le lemme 2.6, on dispose d'un isomorphisme

$$\varsigma\otimes\varsigma = (\varsigma_s\otimes\varsigma_t)_{s,t\in\mathscr{E}_v} : M\otimes M \to M_v^{e_v}\otimes M_v^{e_v} = (M_v\otimes M_v)^{e_v^2}$$

de Γ_{k_v}-modules. Notons que pour tous $s, t \in \mathscr{E}_v$, $f_1, f_2 \in M$ et $h_1, h_2 \in \mathfrak{g}_v$, on a

$$(\varsigma_s \otimes \varsigma_t)(f_1 \otimes f_2)(h_1, h_2) = (\varsigma_s(f_1) \otimes \varsigma_t(f_2))(h_1, h_2) = \varsigma_s(f_1)(h_1) \otimes \varsigma_t(f_2)(h_2) \\ = f_1(sh_1) \otimes f_2(th_2) = (f_1 \otimes f_2)(sh_1, th_2).$$

Mais comme $M \otimes M$ est engendré (en tant que groupe abélien) par les éléments de la forme $f_1 \otimes f_2$ (où $f_1, f_2 \in M$), on voit que

$$(\varsigma_s \otimes \varsigma_t)(f)(h_1, h_2) = f(sh_1, th_2) \quad \forall s, t \in \mathscr{E}_v,\ \forall f \in M \otimes M,\ \forall h_1, h_2 \in \mathfrak{g}_v. \tag{2-3}$$

Par le lemme 2.3 (appliqué aux groupes profinis $\Gamma_{L_w} \subseteq \Gamma_{k_v}$ et au Γ_{k_v}-module M_v), la composée

$$\mathrm{sh}'_v = (\mathrm{sh}')^{e_v^2} \circ (\varsigma \otimes \varsigma)_* : \mathrm{Z}^r(k_v, M \otimes M) \to \mathrm{Z}^r(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$$

induit un isomorphisme $\mathrm{H}^r(k_v, M \otimes M) \to \mathrm{H}^r(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$ pour tout $r \geqslant 1$.

Explicitons maintenant l'application $\mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v} \times \mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v} \to \mathrm{H}^2(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$ associée au cup-produit $\cup : \mathrm{H}^1(k_v, M) \times \mathrm{H}^1(k_v, M) \to \mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M)$.

Lemme 2.7. *On a un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v} \times \mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v} \arrow[r, "((a_s)_{s\in\mathscr{E}_v}, (b_s)_{s\in\mathscr{E}_v}) \mapsto ({}^{h^{-1}}a_s \cup b_t)_{h\in\mathfrak{g}_v, s,t\in\mathscr{E}_v}"] & \mathrm{H}^2(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|} \\
\mathrm{H}^1(k_v, M) \times \mathrm{H}^1(k_v, M) \arrow[u, "\mathrm{sh}_v \times \mathrm{sh}_v"] \arrow[r, "\cup"] & \mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M) \arrow[u, "\mathrm{sh}'_v"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Puisque $\mathrm{sh}_v = \mathrm{sh}^{e_v} \circ \varsigma_*$ et $\mathrm{sh}'_v = (\mathrm{sh}')^{e_v^2} \circ (\varsigma \otimes \varsigma)_*$, il suffit de montrer que les deux petits carrés du diagramme suivant sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v} \times \mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v} \arrow[r, "((a_s)_{s\in\mathscr{E}_v}, (b_s)_{s\in\mathscr{E}_v}) \mapsto ({}^{h^{-1}}a_s \cup b_t)_{h\in\mathfrak{g}_v, s,t\in\mathscr{E}_v}"] & \mathrm{H}^2(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|} \\
\mathrm{H}^1(k_v, M_v)^{e_v} \times \mathrm{H}^1(k_v, M_v)^{e_v} \arrow[u, "\mathrm{sh}^{e_v} \times \mathrm{sh}^{e_v}"] \arrow[r, "((x_s)_{s\in\mathscr{E}_v}, (y_s)_{s\in\mathscr{E}_v}) \mapsto (x_s \cup y_t)_{s,t\in\mathscr{E}_v}"] & \mathrm{H}^2(k_v, M_v \otimes M_v)^{e_v^2} \arrow[u, "(\mathrm{sh}')^{e_v^2}"'] \\
\mathrm{H}^1(k_v, M) \times \mathrm{H}^1(k_v, M) \arrow[u, "\varsigma_* \times \varsigma_*"] \arrow[r, "\cup"] & \mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M) \arrow[u, "(\varsigma\otimes\varsigma)_*"']
\end{tikzcd} \tag{2-4}$$

Par le lemme 2.4, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(L_w, A) \times \mathrm{H}^1(L_w, A) \arrow[r, "(a,b) \mapsto ({}^{h^{-1}}a \cup b)_{h\in\mathfrak{g}_v}"] & \mathrm{H}^2(L_w, A \otimes A)^{|\mathfrak{g}_v|} \\
\mathrm{H}^1(k_v, M_v) \times \mathrm{H}^1(k_v, M_v) \arrow[u, "\mathrm{sh} \times \mathrm{sh}"] \arrow[r, "\cup"] & \mathrm{H}^2(k_v, M_v \otimes M_v) \arrow[u, "\mathrm{sh}'"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif, d'où la commutativité du carré du haut de (2-4). Le carré du bas de (2-4) commute tout simplement par fonctorialité du cup-produit. $\square$

Le résultat suivant est une version locale du lemme 2.5.

Lemme 2.8. *On munit A de l'action triviale de Γ_k. Soit $j : A \otimes A \hookrightarrow M \otimes M$ l'inclusion Γ_k-équivariante qui à tout $m \in A \otimes A$ associe l'application*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to A \otimes A, \quad (g, h) \mapsto m.$$

Soit $r \geqslant 1$ et soit $\mathrm{res} : \mathrm{Z}^r(k_v, A \otimes A) \to \mathrm{Z}^r(L_w, A \otimes A)$ *le morphisme de restriction. Alors l'on dispose d'un diagramme commutatif, où la flèche verticale est un isomorphisme :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^r(k_v, A \otimes A) \arrow[r, "{(\mathrm{res},\ldots,\mathrm{res})}"] \arrow[dr, "j_*"'] & \mathrm{H}^r(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|} \\
& \mathrm{H}^r(k_v, M \otimes M) \arrow[u, "\mathrm{sh}'_v"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Z}^r(k_v, A \otimes A)$. Pour tous $s, t \in \mathscr{E}_v$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \Gamma_{L_w}$ et $h \in \mathfrak{g}_v$, on a

$$((\varsigma_s \otimes \varsigma_t)_* j_* x)_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}(h, 1) = (\varsigma_s \otimes \varsigma_t)(j(x_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}))(h, 1) \overset{(2\text{-}3)}{=} j(x_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r})(sh, t) = x_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r} = \mathrm{res}(x)_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r},$$

d'où $\mathrm{sh}'((\varsigma_s \otimes \varsigma_t)_* j_* x) = (\mathrm{res}(x), \ldots, \mathrm{res}(x)) \in \mathrm{Z}^r(L_w, A \otimes A)^{|\mathfrak{g}_v|}$ pour tous $s, t \in \mathscr{E}_v$ en vertu du lemme 2.3. Ainsi, on a $\mathrm{sh}'_v(j_* x) = (\mathrm{sh}')^{e_v^2}((\varsigma \otimes \varsigma)_* j_* x) = (\mathrm{res}(x), \ldots, \mathrm{res}(x))$ dans $\mathrm{Z}^r(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$, ou $\mathrm{sh}'_v(j_*[x]) = (\mathrm{res}([x]), \ldots, \mathrm{res}([x]))$ dans $\mathrm{H}^r(L_w, A \otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

2D. ***Description des localisations.*** On garde les notations du paragraphe précédent. Rappelons qu'on a des isomorphismes

$$\mathrm{sh} : \mathrm{H}^1(k, M) \to \mathrm{H}^1(L, A) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}_v = \mathrm{sh}^{e_v} \otimes \varsigma_* : \mathrm{H}^1(k_v, M) \to \mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v}.$$

Décrivons le morphisme $\mathrm{H}^1(L, A) \to \mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v}$ associé au morphisme de localisation

$$\mathrm{loc}_v : \mathrm{H}^1(k, M) \to \mathrm{H}^1(k_v, M).$$

Lemme 2.9. *On a un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(L, A) \arrow[r, "{a \mapsto (({}^{s^{-1}}a)_w)_{s \in \mathscr{E}_v}}"] & \mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v} \\
\mathrm{H}^1(k, M) \arrow[u, "\mathrm{sh}"] \arrow[r, "\mathrm{loc}_v"] & \mathrm{H}^1(k_v, M) \arrow[u, "\mathrm{sh}_v"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{H}^1(L, A)$, vu comme morphisme continu $\Gamma_L \to A$. Soit $x : \Gamma_k \to M$ le 1-cocycle représentant la classe $\mathrm{sh}^{-1}(a) \in \mathrm{H}^1(k, M)$ construit dans le lemme 2.1. Alors l'on a $x_\sigma(g) = {}^{u(g)^{-1}}a_\sigma$ pour tous $\sigma \in \Gamma_L$ et $g \in \mathfrak{g}$ (où $u(g) \in \Gamma_k$ désigne un relevé de g).

Étudions le localisé $x_v : \Gamma_{k_v} \to M$. Pour tous $s \in \mathscr{E}_v$ et $\sigma \in \Gamma_{L_w}$, on a

$$((\varsigma_s)_* x_v)_\sigma(1) = \varsigma_s((x_v)_\sigma)(1) = (x_v)_\sigma(s) = x_\sigma(s) = {}^{u(s)^{-1}}a_\sigma = (({}^{u(s)^{-1}}a)_w)_\sigma.$$

Ainsi, $\mathrm{sh}((\varsigma_s)_* x_v) = ({}^{u(s)^{-1}}a)_w$ dans $\mathrm{Z}^1(L_w, A)$, d'où $\mathrm{sh}_v(x_v) = ((\varsigma_s)_* x_v)_{s\in\mathscr{E}_v} = (({}^{u(s)^{-1}}a)_w)_{s\in\mathscr{E}_v}$ dans $\mathrm{Z}^1(L_w, A)^{e_v}$, ou $\mathrm{sh}_v([x_v]) = (({}^{s^{-1}}a)_w)_{s\in\mathscr{E}_v}$ dans $\mathrm{H}^1(L_w, A)^{e_v}$. □

Rappelons maintenant qu'on a des isomorphismes

$$\mathrm{sh}' : \mathrm{H}^2(k, M\otimes M) \to \mathrm{H}^2(L, A\otimes A)^{|\mathfrak{g}|} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'_v = (\mathrm{sh}')^{e_v^2} \circ (\varsigma\otimes\varsigma)_* : \mathrm{H}^2(k_v, M\otimes M) \to \mathrm{H}^2(L_w, A\otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}.$$

Décrivons le morphisme $\mathrm{H}^2(L, A\otimes A)^{|\mathfrak{g}|} \to \mathrm{H}^2(L_w, A\otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$ associé au morphisme de localisation

$$\mathrm{loc}_v : \mathrm{H}^2(k, M\otimes M) \to \mathrm{H}^2(k_v, M\otimes M).$$

Lemme 2.10. *On a un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^2(L, A\otimes A)^{|\mathfrak{g}|} \arrow[rr, "(\alpha_g)_{g\in\mathfrak{g}} \mapsto (({}^{t^{-1}}\alpha_{sht^{-1}})_w)_{h\in\mathfrak{g}_v, s,t\in\mathscr{E}_v}"] & & \mathrm{H}^2(L_w, A\otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|} \\
\mathrm{H}^2(k, M\otimes M) \arrow[u, "\mathrm{sh}'"] \arrow[rr, "\mathrm{loc}_v"] & & \mathrm{H}^2(k_v, M\otimes M) \arrow[u, "\mathrm{sh}'_v"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $(a_g)_{g\in\mathfrak{g}}$ une famille de 2-cocycles $\Gamma_L\times\Gamma_L \to A\otimes A$. Pour tout $g\in\mathfrak{g}$, on note $x_g : \Gamma_k\times\Gamma_k \to \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L}(A\otimes A) = \{\mathfrak{g} \to A\otimes A\}$ le 2-cocycle construit dans le lemme 2.2 (appliqué au $A\otimes A$ au lieu de A), de sorte que $\mathrm{sh}(x_g) = a_g$ et que

$$(x_g)_{\sigma,\tau}(h) = {}^{u(h)^{-1}}(a_g)_{\sigma,\tau} \quad \forall \sigma,\tau\in\Gamma_L,\ \forall h\in\mathfrak{g}, \tag{2-5}$$

où $u(h)\in\Gamma_k$ désigne un relevé de h.

Reprenons les notations $\omega_g : M\otimes M \to \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L}(A\otimes A)$ et

$$\omega = (\omega_g)_{g\in\mathfrak{g}} : M\otimes M \to (\mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L}(A\otimes A))^{|\mathfrak{g}|}$$

au début du paragraphe 2B. Par le lemme 2.3, il existe un 2-cocycle $y\in\mathrm{Z}^2(k, M\otimes M)$ tel que $x_g = (\omega_g)_* y$ pour tout $g\in\mathfrak{g}$. Alors $\mathrm{sh}'(y) = (\mathrm{sh}((\omega_g)_* y))_{g\in\mathfrak{g}} = (\mathrm{sh}(x_g))_{g\in\mathfrak{g}} = (a_g)_{g\in\mathfrak{g}} \in \mathrm{Z}^2(L, A\otimes A)^{|\mathfrak{g}|}$.

Étudions le localisé $y_v \in \mathrm{Z}^2(k_v, M\otimes M)$. Pour tous $s,t\in\mathscr{E}_v$, $h\in\mathfrak{g}_v$ et $\sigma,\tau\in\Gamma_{L_w}$, on a

$$\begin{aligned}
((\varsigma_s\otimes\varsigma_t)_* y_v)_{\sigma,\tau}(h,1) &= (\varsigma_s\otimes\varsigma_t)((y_v)_{\sigma,\tau})(h,1) = (\varsigma_s\otimes\varsigma_t)(y_{\sigma,\tau})(h,1) \overset{(2\text{-}3)}{=} y_{\sigma,\tau}(sh,t) \\
&= y_{\sigma,\tau}(sht^{-1}t, t) \overset{(2\text{-}2)}{=} \omega_{sht^{-1}}(y_{\sigma,\tau})(t) = ((\omega_{sht^{-1}})_* y)_{\sigma,\tau}(t) \\
&= (x_{sht^{-1}})_{\sigma,\tau}(t) \overset{(2\text{-}5)}{=} {}^{u(t)^{-1}}(a_{sht^{-1}})_{\sigma,\tau} = ({}^{u(t)^{-1}}(a_{sht^{-1}})_w)_{\sigma,\tau},
\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{sh}'((\varsigma_s\otimes\varsigma_t)_* y_v) = ({}^{u(t)^{-1}}(a_{sht^{-1}})_w)_{h\in\mathfrak{g}_v}$ dans $\mathrm{Z}^2(L_w, A\otimes A)^{|\mathfrak{g}_v|}$ par le lemme 2.3. Ainsi

$$\mathrm{sh}'_v(y_v) = (\mathrm{sh}'((\varsigma_s\otimes\varsigma_t)_* y_v))_{s,t\in\mathscr{E}_v} = (({}^{u(t)^{-1}}(a_{sht^{-1}}))_w)_{h\in\mathfrak{g}_v, s,t\in\mathscr{E}_v}$$

dans $\mathrm{Z}^2(L_w, A\otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$, ou $\mathrm{sh}'_v([y_v]) = (({}^{t^{-1}}[a_{sht^{-1}}])_w)_{h\in\mathfrak{g}_v, s,t\in\mathscr{E}_v}$ dans $\mathrm{H}^2(L_w, A\otimes A)^{e_v^2|\mathfrak{g}_v|}$. Cette égalité établit le résultat voulu. $\square$

3. La construction de Borovoi–Kunyavskii

3A. $\mathbf{H^2}$ *non abélien et espaces homogènes.* Soit K un corps de caractéristique nulle. Pour étudier les K-espaces homogènes de SL_m (qui peut ne pas avoir de K-point), il convient d'introduire la notion de 2-cohomologie non abélienne. Nous allons utiliser sa version concrète en termes de cocycles [Flicker et al. 1998, §1].

Seuls les K-liens dont le $\overline{K}$-groupe sous-adjacent est fini (c'est donc simplement un groupe abstrait fini) seront pris en considération. Un *K-lien (fini)* $L = (F, \kappa)$ est alors la donnée d'un groupe fini F muni d'une action extérieure $\kappa : \Gamma_K \to \mathrm{Out}(F)$. Si F est un K-groupe — i.e., si une action (continue) $\rho : \Gamma_K \to \mathrm{Aut}(F)$ est donnée — on lui associe son K-lien canonique $\mathrm{lien}(F)$.

Soit $L = (F, \kappa)$ un K-lien. Un *2-cocycle à coefficients dans* L est un couple (ρ, u) où $\rho : \Gamma_K \to \mathrm{Aut}(F)$ et $u : \Gamma_K \times \Gamma_K \to F$ sont des applications continues telles que :

1. ρ_σ relève κ_σ pour tout $\sigma \in \Gamma_K$.
2. $\rho_{\sigma\tau} = \mathrm{int}(u_{\sigma,\tau}) \circ \rho_\sigma \circ \rho_\tau$ pour tous $\sigma, \tau \in \Gamma_K$.
3. $u_{\sigma,\tau\upsilon}\rho_\sigma(u_{\tau,\upsilon}) = u_{\sigma\tau,\upsilon}u_{\sigma,\tau}$ pour tous $\sigma, \tau, \upsilon \in \Gamma_K$.

Notons $\mathrm{Z}^2(K, L)$ l'ensemble des 2-cocycles à coefficients dans L. Deux tels 2-cocycles (ρ, u) et (ρ', u') sont dits *cohomologues* s'il existe une application continue $c : \Gamma_K \to F$ telle que :

1. $\rho'_\sigma = \mathrm{int}(c_\sigma) \circ \rho_\sigma$ pour tout $\sigma \in \Gamma_K$.
2. $u'_{\sigma,\tau} = c_{\sigma\tau}u_{\sigma,\tau}\rho_\sigma(c_\tau)^{-1}c_\sigma^{-1}$ pour tous $\sigma, \tau \in \Gamma_K$.

Alors « être cohomologues » est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Z}^2(K, L)$. On appelle *ensemble de* 2-*cohomologie galoisienne à coefficients dans* L le quotient $\mathrm{Z}^2(K, L)$ par cette relation, et on le note $\mathrm{H}^2(K, L)$. Si F est un K-groupe, on note $\mathrm{H}^2(K, F) := \mathrm{H}^2(K, \mathrm{lien}(F))$. Dans le cas où F est un Γ_K-module, $\mathrm{H}^2(K, F)$ est le groupe de 2-cohomologie galoisienne usuel.

Soit $L = (F, \kappa)$ un K-lien. Une classe $\eta \in \mathrm{H}^2(K, L)$ est dite *neutre* si elle est représentée par un 2-cocycle de la forme $(\rho, 1)$. Dans ce cas, $\rho : \Gamma_K \to \mathrm{Aut}(F)$ est une action continue de Γ_K sur F relevant κ et donc η correspond à une K-forme F' ; on note $\eta = n(F')$. L'ensemble $\mathrm{H}^2(K, L)$ peut ne pas avoir de classe neutre, et elle peut également en posséder plusieurs. Si F est un K-groupe et $\rho : \Gamma_K \to F$ désigne l'action de Γ_K, l'ensemble $\mathrm{H}^2(K, F)$ a une classe neutre privilégiée $\eta_0 = [(\rho, 1)] = n(F)$. Si F est un Γ_K-module, la seule classe neutre du groupe $\mathrm{H}^2(K, F)$ est 0.

Soit $L = (F, \kappa)$ un K-lien et soit $Z = Z(F)$. Comme Z est commutatif et caractéristique dans F, l'action extérieure de Γ_K sur F induit une action sur Z, i.e., Z est naturellement un Γ_K-module. Dans le cas où l'ensemble $\mathrm{H}^2(K, L)$ est non vide, c'est un espace principal homogène du groupe abélien $\mathrm{H}^2(K, Z)$, l'action étant définie par

$$[\beta] \cdot [(\rho, u)] := [(\rho, \beta u)],$$

où β (resp. (ρ, u)) est un 2-cocycle à coefficients dans Z (resp. dans L) [Borovoi 1993, Lemma 1.9].

Soit X un K-espace homogène d'un K-groupe algébrique G à stabilisateur géométrique fini F. Alors F n'est pas a priori muni d'une action, mais seulement d'une action extérieure de Γ_K. On peut donc définir le *lien de Springer* L_X de X. Plus concrètement, soit $x \in X(\overline{K})$ un point géométrique et soit $F \subseteq G(\overline{K})$ son stabilisateur. Pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, écrivons ${}^\sigma x = x \cdot g_\sigma$, où $g_\sigma \in \mathrm{SL}_m(\overline{K})$ est unique modulo multiplication à gauche par un élément de F. On peut choisir les g_σ de sorte que l'application $\sigma \mapsto g_\sigma$ est continue. On définit

$$\rho_\sigma : F \to F, \quad \rho_\sigma(f) = g_\sigma {}^\sigma f g_\sigma^{-1}.$$

Alors $\rho : \Gamma_K \to \mathrm{Aut}(F)$ est continue et la composée $\kappa : \Gamma_K \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(F) \to \mathrm{Out}(F)$ est une action extérieure. On vérifie que le K-lien $L_X = (F, \kappa)$ ne dépend pas du choix de x et des g_σ ; c'est le lien de Springer de X. De plus, si l'on note $u_{\sigma,\tau} := g_{\sigma\tau} {}^\sigma g_\tau^{-1} g_\sigma^{-1}$ pour tous $\sigma, \tau \in \Gamma_K$, alors (ρ, u) est un 2-cocycle à coefficients dans L_X. On définit la *classe de Springer* de X comme étant $\eta_X := [(\rho, u)] \in \mathrm{H}^2(K, L_X)$. Elle est neutre si et seulement si X est dominé par un K-torseur sous G [Borovoi 1993, §7.6]. En particulier, si $\mathrm{H}^1(K, G) = 1$ (par exemple, c'est le cas pour $G = \mathrm{GL}_m$ ou $G = \mathrm{SL}_m$ par une variante du théorème 90 de Hilbert), alors η_X est neutre si et seulement si $X(K) \neq \varnothing$.

Lemme 3.1. *Soit L un K-lien et soit $\eta \in \mathrm{H}^2(K, L)$. Alors il existe un entier m et un espace homogène X de SL_m de lien de Springer L et de classe de Springer η. Deux tels espaces homogènes sont K-stablement birationnels.*

Démonstration. On pourra consulter [Demarche et Lucchini Arteche 2019, corollaires 3.3 et 3.5]. □

Remarque 3.2. Soit F un K-groupe fini et $Z = Z(F)$. À partir de chaque classe $\eta \in \mathrm{H}^2(K, Z)$, Borovoi et Kunyavskii [1997, §2] ont construit explicitement un espace homogène X de SL_m de lien de Springer $\mathrm{lien}(F)$. Notant $\eta_0 = n(F) \in \mathrm{H}^2(K, F)$ la classe neutre privilégiée, alors la classe de Springer de X est $\eta \cdot \eta_0$ [Harari et Skorobogatov 2002, Lemma 5.3]. Puisque $\mathrm{H}^2(K, Z)$ agit transitivement sur $\mathrm{H}^2(K, F)$, cette construction-là donne tous les espaces homogènes de SL_m de lien de Springer $\mathrm{lien}(F)$, à équivalence birationnelle stable près.

Proposition 3.3. *Soient F un K-groupe fini, $Z = Z(F)$ et $\eta_0 \in \mathrm{H}^2(K, F)$ la classe neutre privilégiée. On note $\Delta : \mathrm{H}^1(K, F/Z) \to \mathrm{H}^2(K, Z)$ l'application connectante induite par l'extension centrale*

$$1 \to Z \to F \to F/Z \to 1$$

(*cf.* [Serre 1962, chapitre VII, annexe, proposition 2]). *Soit $\beta \in \mathrm{H}^2(K, Z)$ et soit X un espace homogène de SL_m de lien de Springer* $\mathrm{lien}(F)$ *et de classe de Springer $\eta_X = \beta \cdot \eta_0 \in \mathrm{H}^2(K, F)$. Alors $X(K) \neq \varnothing$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathrm{H}^1(K, F/Z)$ tel que $\beta = \Delta(\alpha)$. Dans ce cas, X est K-isomorphe à ${}_{\mathfrak{a}}F \backslash \mathrm{SL}_m$, où $\mathfrak{a} : \Gamma_K \to F/Z$ est n'importe quel* 1*-cocycle représentant α. Ici, ${}_{\mathfrak{a}}F$ désigne la K-forme de F tordue par $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire que son action de Galois $\cdot_{\mathfrak{a}} : \Gamma_k \times {}_{\mathfrak{a}}F \to {}_{\mathfrak{a}}F$ est donnée par*

$$\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} f = \tilde{\mathfrak{a}}_\sigma {}^\sigma f \tilde{\mathfrak{a}}_\sigma^{-1} \quad \forall \sigma \in \Gamma_k,\ \forall f \in F,$$

où $\tilde{\mathfrak{a}}_\sigma \in F$ *est un relevé quelconque de* $\mathfrak{a}_\sigma$.

Démonstration. Par [Borovoi 1993, Lemma 2.4 et Lemma 2.5], η_X est neutre si et seulement s'il existe un 1-cocycle $\mathfrak{a} : \Gamma_K \to F/Z$ tel que $\eta_X = n({}_{\mathfrak{a}}F) = \Delta([\mathfrak{a}]) \cdot \eta_0$. Cette égalité équivaut à $\Delta([\mathfrak{a}]) = \beta$ puisque l'action de $\mathrm{H}^2(K, Z)$ sur $\mathrm{H}^2(K, F)$ est libre. Dans ce cas, X est k-stablement birationnel à ${}_{\mathfrak{a}}F\backslash \mathrm{SL}_{m'}$, donc X possède un K-point dont le stabilisateur est K-isomorphe à ${}_{\mathfrak{a}}F$, i.e., $X \simeq {}_{\mathfrak{a}}F\backslash \mathrm{SL}_m$. □

Remarque 3.4. Lorsque $K = k$ est un corps de nombres, F est un k-groupe fini et $Z = Z(F) = [F, F]$, Harari et Skorobogatov ont utilisé une « théorie de la descente non abélienne » pour démontrer le fait suivant : si X est un k-espace homogène de SL_m de lien de Springer lien(F) et de classe de Springer $\eta \cdot \eta_0$, où $\eta \in Ш^2(k, Z)$, alors X possède un point adélique orthogonal à $\mathrm{Br}_1 X := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X})$ [Harari et Skorobogatov 2002, Proposition 5.5]. Ils ont soulevé la question si l'on peut en déduire l'existence de contre-exemples au principe de Hasse non expliqués par l'obstruction de Brauer–Manin algébrique (cf. loc. cit., Remark 5.6). Dans ce texte, nous y donnons une réponse partielle : c'est impossible pour les données de k et de F comme dans l'énoncé du théorème A.

3B. *Construction du stabilisateur.* Soit K un corps de caractéristique nulle. Soient M et Z des Γ_K-modules finis et $\phi : M \otimes M \to Z$ un morphisme Γ_K-équivariant. On dira que ϕ est *non dégénéré* s'il possède les propriétés suivantes :

1. Si $x \in M$ est tel que $\phi(x \otimes y) = 0$ pour tout $y \in M$, alors $x = 0$.
2. Si $y \in M$ est tel que $\phi(x \otimes y) = 0$ pour tout $x \in M$, alors $y = 0$.

On munit Z de l'action triviale de $M \oplus M$. Posons

$$\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z, \quad \Phi((x, y), (x', y')) = \phi(x \otimes y'). \tag{3-1}$$

Alors Φ est biadditive, donc c'est un 2-cocycle *normalisé* ($\Phi(a, 0) = \Phi(0, a) = 0$ pour tout $a \in M \oplus M$). Soit F le produit croisé $Z \times_\Phi (M \oplus M)$, c'est-à-dire que $F = Z \times (M \oplus M)$ comme ensemble et la loi de composition sur F est donnée par la formule

$$(z, a)(z', a') = (z + z' + \Phi(a, a'), a + a') \quad \forall z, z' \in Z, \forall a, a' \in M \oplus M. \tag{3-2}$$

En particulier, $(z, a) = (z, 0)(0, a) = (0, a)(z, 0)$. De plus, comme

$$(0, a)(0, -a) = (\Phi(a, -a), 0) = (-\Phi(a, a), 0) = (\Phi(a, a), 0)^{-1},$$

on a $(0, a)^{-1} = (\Phi(a, a), 0)(0, -a) = (\Phi(a, a), -a)$ et donc

$$(z, a)^{-1} = (z, 0)^{-1}(0, a)^{-1} = (-z, 0)(\Phi(a, a), -a) = (\Phi(a, a) - z, -a). \tag{3-3}$$

On obtient une extension *centrale* de groupes *abstraits* :

$$0 \to Z \to F \to M \oplus M \to 0. \tag{3-4}$$

Lemme 3.5. *Soient* M, Z, ϕ, Φ, F *comme ci-dessus. Soient* $z, z' \in Z$ *et* $a, a' \in M \oplus M$.

1. *On a* $(z,a)(z',a')(z,a)^{-1} = (z' + \Phi(a,a') - \Phi(a',a), a')$.
2. *Le commutateur* $[(z,a),(z',a')] = (\Phi(a,a') - \Phi(a',a), 0)$.
3. *Si* ϕ *est surjectif*, $Z = [F,F]$.

Démonstration. 1. On a

$$\begin{aligned}
(z,a)(z',a')(z,a)^{-1} &= (z,0)(0,a)(z',a')(0,a)^{-1}(z,0)^{-1} \\
&= (0,a)(z',a')(0,a)^{-1} && (Z \text{ central dans } F) \\
&= (z' + \Phi(a,a'), a+a')(\Phi(a,a), -a) && (\text{par (3-2) et (3-3)}) \\
&= (z' + \Phi(a,a') + \Phi(a,a) + \Phi(a+a', -a), a+a'-a) && (\text{par (3-2)}) \\
&= (z' + \Phi(a,a') - \Phi(a',a), a').
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
[(z,a),(z',a')] &= [(z,0)(0,a),(z',0)(0,a')] \\
&= [(0,a),(0,a')] && (Z \text{ central dans } F) \\
&= (0,a)(0,a')(0,a)^{-1}(0,a')^{-1} \\
&= (\Phi(a,a') - \Phi(a',a), a')(\Phi(a',a'), -a') && (\text{par 1. et (3-3)}) \\
&= (\Phi(a,a') - \Phi(a',a) + \Phi(a',a') + \Phi(a',-a'), a'-a') && (\text{par (3-2)}) \\
&= (\Phi(a,a') - \Phi(a',a), 0).
\end{aligned}$$

3. Comme $F/Z = M \oplus M$ est commutatif, on a toujours que $[F,F] \subseteq Z$. De plus,

$$\phi(x \otimes y) = \phi(x \otimes y) - \phi(0,0) = \Phi((x,0),(0,y)) - \Phi((0,y),(x,0))$$

pour tous $x, y \in M$, d'où

$$(\phi(x \otimes y), 0) = (\Phi((x,0),(0,y)) - \Phi((0,y),(x,0)), 0) = [(0,(x,0)),(0,(0,y))] \in [F,F]$$

par le deuxième point. Ainsi, on aura $Z = Z \times \{0\} \subseteq [F,F]$ dès que ϕ est surjectif. $\square$

Lemme 3.6. *Soient* M, Z, ϕ, Φ, F *comme ci-dessus. Si* ϕ *est non dégénéré*, $Z = Z(F)$.

Démonstration. Comme Z est centrale dans F, il reste à montrer que $Z(F) \subseteq Z$. Supposons $(z,a) \in Z(F)$, où $z \in Z$ et $a = (x,y) \in M \oplus M$. En vertu du lemme 3.5, on a

$$(0,0) = [(z,a),(0,a')] = (\Phi(a,a') - \Phi(a',a), 0) = (\phi(x \otimes y') - \phi(x' \otimes y), 0)$$

pour tout $a' = (x',y') \in M \oplus M$. En choisissant $x' = 0$, on obtient

$$\phi(x \otimes y') = 0 \quad \forall y' \in M,$$

d'où $x = 0$ puisque ϕ est non dégénéré. De même, $y = 0$, d'où $a = 0$ et donc $(z,a) = (z,0) \in Z$. $\square$

Finalement, on munit F d'une action de Γ_K qui est compatible avec celles sur Z et sur $M \oplus M$; alors (3-4) devient une extension centrale de K-groupes finis. Dans ce texte, on se concentre principalement sur l'action *coordonnée par coordonnée*, c'est-à-dire

$$^{\sigma}(z, a) = ({}^{\sigma}z, {}^{\sigma}a)$$

pour tous $\sigma \in \Gamma_K$, $z \in Z$ et $a \in A$. De (3-2), on voit que cette action est bien compatible avec la loi de composition sur F puisque Φ est Γ_K-équivariant.

Définition 3.7. On appelle *espace homogène de Borovoi–Kunyavskii* tout espace homogène de SL_m dont les stabilisateurs géométriques F sont de la forme du groupe du milieu de (3-4), avec $Z = Z(F) = [F, F]$.

Rappelons que la condition $Z = Z(F) = [F, F]$ se garantit lorsque ϕ est surjectif et non dégénéré (lemmes 3.5 et 3.6).

3C. ***Quelques calculs avec des cocycles.*** Soit K un corps de caractéristique nulle. Soient M et Z des Γ_K-modules finis et $\phi : M \otimes M \to Z$ un morphisme Γ_K-équivariant. On définit l'application biadditive $\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z$ par (3-1) et l'on pose $F = Z \times_\Phi (M \oplus M)$, muni de l'action coordonnée par coordonnée de Γ_K.

Si $x, y : \Gamma_K \to M$ sont des 1-cochaînes, on notera $x \otimes y : \Gamma_K \to M \otimes M$ la 1-cochaîne $\sigma \mapsto x_\sigma \otimes y_\sigma$. On considérera le cup-produit des cochaînes à coefficients dans M induit par l'accouplement $\otimes : M \times M \to M \otimes M$. Pour la preuve du théorème 5.6 (c'est-à-dire du théorème A), au vu de la proposition 3.3, il conviendra de décrire l'application connectante $\Delta : \mathrm{H}^1(K, M \oplus M) \to \mathrm{H}^2(K, Z)$ induite par (3-4).

Lemme 3.8. *Avec les notations ci-dessus, on a les résultats suivants.*

1. *Soit $\mathfrak{a} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) : \Gamma_K \to M \oplus M$ un 1-cocycle (i.e., $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ sont des 1-cocycles), et soit ${}_{\mathfrak{a}}F$ la K-forme de F tordue par $\mathfrak{a}$ (cf. proposition 3.3). Soient $z : \Gamma_K \to Z$, $a = (x, y) : \Gamma_K \to M \oplus M$ des 1-cochaînes, et $f = (z, a) : \Gamma_K \to {}_{\mathfrak{a}}F$. Alors f est un cocycle si et seulement si :*
   — *a est un cocycle (i.e., x et y sont des cocycles).*
   — $\mathrm{d}z + \phi_*(\mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y})) = 0.$
2. *Notons $\Delta : \mathrm{H}^1(K, M \oplus M) \to \mathrm{H}^2(K, Z)$ l'application connectante induite par (3-4) (cf. [Serre 1962, chapitre VII, annexe, proposition 2]). Alors $\Delta([a]) = \phi_*[x \cup y]$ pour tout 1-cocycle $a = (x, y) : \Gamma_K \to M \oplus M$.*

Démonstration. On note toujours $\cdot_{\mathfrak{a}}$ l'action de Γ_K sur F tordue par $\mathfrak{a}$. Alors

$$\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} (\zeta, \alpha) = (0, \mathfrak{a}_\sigma)\,{}^{\sigma}(\zeta, \alpha)(0, \mathfrak{a}_\sigma)^{-1} = (0, \mathfrak{a}_\sigma)({}^{\sigma}\zeta, {}^{\sigma}\alpha)(0, \mathfrak{a}_\sigma)^{-1} = ({}^{\sigma}\zeta + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^{\sigma}\alpha) - \Phi({}^{\sigma}\alpha, \mathfrak{a}_\sigma), {}^{\sigma}\alpha) \quad (3\text{-}5)$$

pour tous $(\zeta, \alpha) \in F$ et $\sigma \in \Gamma_K$, en vertu du lemme 3.5.

1. Le morphisme ${}_{\mathfrak{a}}F \to M \oplus M$ étant la deuxième projection, on voit que a est forcément un 1-cocycle dès que f l'est. Soient $\sigma, \tau \in \Gamma_K$. Sous la condition que a est un cocycle, on a

$$\begin{aligned}
&(0, a_\sigma)(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} (z_\tau, a_\tau))(0, a_{\sigma\tau})^{-1} \\
&\qquad = (0, a_\sigma)(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} (z_\tau, a_\tau))(\Phi(a_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau}), -a_{\sigma\tau}) && \text{(par (3-3))} \\
&\qquad = (0, a_\sigma)({}^\sigma z_\tau + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma a_\tau) - \Phi({}^\sigma a_\tau, \mathfrak{a}_\sigma), {}^\sigma a_\tau)(\Phi(a_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau}), -a_{\sigma\tau}) && \text{(par (3-5))} \\
&\qquad = ({}^\sigma z_\tau + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma a_\tau) - \Phi({}^\sigma a_\tau, \mathfrak{a}_\sigma) + \Phi(a_\sigma, {}^\sigma a_\tau), a_\sigma + {}^\sigma a_\tau)(\Phi(a_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau}), -a_{\sigma\tau}) && \text{(par (3-2))} \\
&\qquad = ({}^\sigma z_\tau + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma a_\tau) - \Phi({}^\sigma a_\tau, \mathfrak{a}_\sigma) + \Phi(a_\sigma, {}^\sigma a_\tau), a_{\sigma\tau})(\Phi(a_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau}), -a_{\sigma\tau}) \\
&\qquad = ({}^\sigma z_\tau + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma a_\tau) - \Phi({}^\sigma a_\tau, \mathfrak{a}_\sigma) + \Phi(a_\sigma, {}^\sigma a_\tau) + \Phi(a_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau}) - \Phi(a_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau}), 0) && \text{(par (3-2))} \\
&\qquad = ({}^\sigma z_\tau + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma a_\tau) - \Phi({}^\sigma a_\tau, \mathfrak{a}_\sigma) + \Phi(a_\sigma, {}^\sigma a_\tau), 0),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f_\sigma(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} f_\tau) f_{\sigma\tau}^{-1} &= (z_\sigma, a_\sigma)(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} (z_\tau, a_\tau))(z_{\sigma\tau}, a_{\sigma\tau})^{-1} \\
&= (z_\sigma, 0)(0, a_\sigma)(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} (z_\tau, a_\tau))(0, a_{\sigma\tau})^{-1}(z_{\sigma\tau}, 0)^{-1} \\
&= (z_\sigma, 0)({}^\sigma z_\tau + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma a_\tau) - \Phi({}^\sigma a_\tau, \mathfrak{a}_\sigma) + \Phi(a_\sigma, {}^\sigma a_\tau), 0)(-z_{\sigma\tau}, 0) \\
&= (z_\sigma + {}^\sigma z_\tau - z_{\sigma\tau} + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma a_\tau) - \Phi({}^\sigma a_\tau, \mathfrak{a}_\sigma) + \Phi(a_\sigma, {}^\sigma a_\tau), 0) \\
&= (z_\sigma + {}^\sigma z_\tau - z_{\sigma\tau} + \phi(\mathfrak{x}_\sigma \otimes {}^\sigma y_\tau - {}^\sigma x_\tau \otimes \mathfrak{y}_\sigma + x_\sigma \otimes {}^\sigma y_\tau), 0) \\
&= ((\mathrm{d}z)_{\sigma,\tau} + \phi(\mathfrak{x} \cup y)_{\sigma,\tau} - {}^\sigma x_\tau \otimes \mathfrak{y}_\sigma + (x \cup y)_{\sigma,\tau}, 0).
\end{aligned}$$

Notons de plus que

$$x_{\sigma\tau} \otimes \mathfrak{y}_{\sigma\tau} = (x_\sigma + {}^\sigma x_\tau) \otimes (\mathfrak{y}_\sigma + {}^\sigma \mathfrak{y}_\tau) = x_\sigma \otimes \mathfrak{y}_\sigma + {}^\sigma x_\tau \otimes \mathfrak{y}_\sigma + x_\sigma \otimes {}^\sigma \mathfrak{y}_\tau + {}^\sigma x_\tau \otimes {}^\sigma \mathfrak{y}_\tau,$$

d'où $-{}^\sigma x_\tau \otimes \mathfrak{y}_\sigma = x_\sigma \otimes {}^\sigma \mathfrak{y}_\tau + (x_\sigma \otimes \mathfrak{y}_\sigma + {}^\sigma(x_\tau \otimes \mathfrak{y}_\tau) - x_{\sigma\tau} \otimes \mathfrak{y}_{\sigma\tau}) = (x \cup \mathfrak{y})_{\sigma,\tau} + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y})_{\sigma,\tau}$ et donc on a

$$f_\sigma(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} f_\tau) f_{\sigma\tau}^{-1} = ((\mathrm{d}z)_{\sigma,\tau} + \phi((\mathfrak{x} \cup y)_{\sigma,\tau} + (x \cup \mathfrak{y})_{\sigma,\tau} + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y})_{\sigma,\tau} + (x \cup y)_{\sigma,\tau}), 0) \tag{3-6}$$

De (3-6), on voit que f est un cocycle si et seulement si a l'est et

$$\mathrm{d}z + \phi_*(\mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y})) = 0,$$

d'où le premier point du lemme.

2. Soit $a = (x, y) : \Gamma_K \to M \oplus M$ un 1-cocycle. On considère la 1-cochaîne $f = (0, a) : \Gamma_K \to F$ relevant a. Alors

$$f_\sigma {}^\sigma f_\tau f_{\sigma\tau}^{-1} = (\phi((x \cup y)_{\sigma,\tau}), 0)$$

pour tous $\sigma, \tau \in \Gamma_K$, au vu de (3-6). Par définition de Δ, on a bien $\Delta([a]) = \phi_*[x \cup y]$. □

Le lemme suivant sera utilisé dans la preuve du théorème 5.8 (c'est-à-dire du théorème B).

Lemme 3.9. *Gardons les notations au début du paragraphe, et soit* $\mathfrak{a} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) : \Gamma_K \to M \oplus M$ *un* 1*-cocycle. Soient* $f = (z, a)$ *et* $f' = (z', a')$ *des* 1*-cocycles* $\Gamma_K \to {}_{\mathfrak{a}}F$ *(cf. proposition 3.3), où* $a = (x, y)$ *et* $a' = (x', y')$ *(voir lemme 3.8). On suppose que* $\alpha = (\xi, \eta) \in M \oplus M$ *est un élément satisfaisant* $a' = a + \mathrm{d}\alpha$ *et l'on considère la* 1*-cochaîne*

$$c := z' - z + \phi_*(-(x + \mathfrak{x}) \cup \eta + \xi \cup (y' + \mathfrak{y}) + \mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y}) : \Gamma_K \to Z.$$

1. c est un cocycle.

2. Si c est un cobord, f *et* f' *sont cohomologues.*

3. Supposons ϕ *surjectif. Écrivons* $z = \phi_*\varepsilon$ *et* $z' = \phi_*\varepsilon'$*, où* $\varepsilon, \varepsilon' : \Gamma_K \to M \otimes M$ *sont des* 1*-cochaînes. Alors on peut écrire*

$$\mathrm{d}\varepsilon + \mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y}) = j_*\lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\varepsilon' + \mathfrak{x} \cup y' + x' \cup \mathfrak{y} + x' \cup y' + \mathrm{d}(x' \otimes \mathfrak{y}) = j_*\lambda',$$

où $j : \operatorname{Ker}\phi \hookrightarrow M \otimes M$ *est l'inclusion et où* $\lambda, \lambda' : \Gamma_K \times \Gamma_K \to \operatorname{Ker}\phi$ *sont des* 2*-cocycles. De plus, si* $\delta : \mathrm{H}^1(K, Z) \to \mathrm{H}^2(K, \operatorname{Ker}\phi)$ *désigne le morphisme connectant induit par la suite exacte*

$$0 \to \operatorname{Ker}\phi \xrightarrow{j} M \otimes M \xrightarrow{\phi} Z \to 0,$$

alors $\delta([c]) = [\lambda' - \lambda]$.

Démonstration. 1. Par l'hypothèse, $x' = x + \mathrm{d}\xi$ et $y' = y + \mathrm{d}\eta$. Comme f et f' sont des cocycles, on a

$$\mathrm{d}z = -\phi_*(\mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y}))$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z' &= -\phi_*(\mathfrak{x} \cup y' + x' \cup \mathfrak{y} + x' \cup y' + \mathrm{d}(x' \otimes \mathfrak{y})) \\ &= -\phi_*(\mathfrak{x} \cup (y + \mathrm{d}\eta) + (x + \mathrm{d}\xi) \cup \mathfrak{y} + (x + \mathrm{d}\xi) \cup (y + \mathrm{d}\eta) + \mathrm{d}((x + \mathrm{d}\xi) \otimes \mathfrak{y})) \end{aligned}$$

par le lemme 3.8. D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z' - \mathrm{d}z &= -\phi_*(\mathfrak{x} \cup \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi \cup \mathfrak{y} + x \cup \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi \cup y + \mathrm{d}\xi \cup \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}(\mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y})) \\ &= -\phi_*((x + \mathfrak{x}) \cup \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi \cup (y + \mathfrak{y} + \mathrm{d}\eta) + \mathrm{d}(\mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y})) \\ &= -\phi_*((x + \mathfrak{x}) \cup \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi \cup (y' + \mathfrak{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y})). \end{aligned}$$

Notant que x, $\mathfrak{x}$, y' et $\mathfrak{y}$ sont des cocycles, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}c &= \mathrm{d}(z' - z + \phi_*(-(x + \mathfrak{x}) \cup \eta + \xi \cup (y' + \mathfrak{y}) + \mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y})) \\ &= \mathrm{d}z' - \mathrm{d}z + \phi_*((x + \mathfrak{x}) \cup \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi \cup (y' + \mathfrak{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{d}\xi \otimes \eta)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc c est bien un cocycle.

2. Écrivons $c = \mathrm{d}\zeta$ avec $\zeta \in Z$. Pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, on a

$$a'_\sigma + \alpha = a_\sigma + {}^\sigma\alpha \tag{3-7}$$

puisque $a' = a + \mathrm{d}\alpha$ et

$$c + z + \phi_*((x + \mathfrak{x}) \cup \eta - \xi \cup (y' + \mathfrak{y}) - \mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y}) = z' \tag{3-8}$$

par définition de c. Calculons

$$\begin{aligned}
&(\zeta, \alpha)^{-1} f_\sigma(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} (\zeta, \alpha)) \\
&\qquad = (\Phi(\alpha, \alpha) - \zeta, -\alpha)(z_\sigma, a_\sigma)(\sigma \cdot_{\mathfrak{a}} (\zeta, \alpha)) && \text{(par (3-3))} \\
&\qquad = (\Phi(\alpha, \alpha) - \zeta, -\alpha)(z_\sigma, a_\sigma)({}^\sigma\zeta + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma\alpha) - \Phi({}^\sigma\alpha, \mathfrak{a}_\sigma), {}^\sigma\alpha) && \text{(par (3-5))} \\
&\qquad = (\Phi(\alpha, \alpha) - \zeta, -\alpha)(z_\sigma + {}^\sigma\zeta + \Phi(\mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma\alpha) - \Phi({}^\sigma\alpha, \mathfrak{a}_\sigma) + \Phi(a_\sigma, {}^\sigma\alpha), a_\sigma + {}^\sigma\alpha) && \text{(par (3-2))} \\
&\qquad = (\Phi(\alpha, \alpha) - \zeta, -\alpha)(z_\sigma + {}^\sigma\zeta + \Phi(a_\sigma + \mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma\alpha) - \Phi({}^\sigma\alpha, \mathfrak{a}_\sigma), a'_\sigma + \alpha) && \text{(par (3-7))} \\
&\qquad = (\Phi(\alpha, \alpha) - \zeta + z_\sigma + {}^\sigma\zeta + \Phi(a_\sigma + \mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma\alpha) - \Phi({}^\sigma\alpha, \mathfrak{a}_\sigma) - \Phi(\alpha, a'_\sigma + \alpha), a'_\sigma) && \text{(par (3-2))} \\
&\qquad = ({}^\sigma\zeta - \zeta + z_\sigma + \Phi(a_\sigma + \mathfrak{a}_\sigma, {}^\sigma\alpha) - \Phi({}^\sigma\alpha, \mathfrak{a}_\sigma) - \Phi(\alpha, a'_\sigma), a'_\sigma) \\
&\qquad = (c_\sigma + z_\sigma + \phi((x_\sigma + \mathfrak{x}_\sigma) \otimes {}^\sigma\eta - {}^\sigma\xi \otimes \mathfrak{y}_\sigma - \xi \otimes y'_\sigma), a'_\sigma) && \text{(car } c = \mathrm{d}\zeta) \\
&\qquad = (c_\sigma + z_\sigma + \phi((x_\sigma + \mathfrak{x}_\sigma) \otimes {}^\sigma\eta - \xi \otimes (y'_\sigma + \mathfrak{y}_\sigma) - ({}^\sigma\xi - \xi) \otimes \mathfrak{y}_\sigma), a'_\sigma) \\
&\qquad = (z'_\sigma, a'_\sigma) && \text{(par (3-8))} \\
&\qquad = f'_\sigma.
\end{aligned}$$

Cette égalité signifie que f et f' sont cohomologues.

3. Comme f est un cocycle, on a

$$\phi_*(\mathrm{d}\varepsilon + \mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y})) = \mathrm{d}z + \phi_*(\mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y})) = 0$$

par le lemme 3.8. Donc on peut écrire

$$\mathrm{d}\varepsilon + \mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y}) = j_*\lambda \tag{3-9}$$

pour une 2-cochaîne $\lambda : \Gamma_K \times \Gamma_K \to \operatorname{Ker} \phi$. Le membre de gauche de (3-9) étant un cocycle, il en va de même pour λ puisque j est injectif. De même, on a

$$\mathrm{d}\varepsilon' + \mathfrak{x} \cup y' + x' \cup \mathfrak{y} + x' \cup y' + \mathrm{d}(x' \otimes \mathfrak{y}) = j_*\lambda' \tag{3-10}$$

pour un 2-cocycle $\lambda' : \Gamma_K \times \Gamma_K \to \operatorname{Ker} \phi$. Considérons maintenant la 1-cochaîne

$$e := \varepsilon' - \varepsilon - (x + \mathfrak{x}) \cup \eta + \xi \cup (y' + \mathfrak{y}) + \mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y} : \Gamma_K \to M \otimes M.$$

Alors $\phi_* e = c$. Calculons le cobord

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e &= \mathrm{d}\varepsilon' - \mathrm{d}\varepsilon + (x+\mathfrak{x}) \cup \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\xi \cup (y' + \mathfrak{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{d}\xi \otimes \mathfrak{y}) \\ &= \mathrm{d}\varepsilon' - \mathrm{d}\varepsilon + (x+\mathfrak{x}) \cup (y'-y) + (x'-x) \cup (y'+\mathfrak{y}) + \mathrm{d}((x'-x) \otimes \mathfrak{y}) \\ &= (\mathrm{d}\varepsilon' + \mathfrak{x} \cup y' + x' \cup \mathfrak{y} + x' \cup y' + \mathrm{d}(x' \otimes \mathfrak{y})) - (\mathrm{d}\varepsilon + \mathfrak{x} \cup y + x \cup \mathfrak{y} + x \cup y + \mathrm{d}(x \otimes \mathfrak{y})) \\ &= j_*(\lambda' - \lambda), \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de (3-9) et (3-10). Par définition de δ, on a $\delta([c]) = [\lambda' - \lambda]$. □

4. Calculs des groupes de Brauer

4A. *Généralités.* Soit K un corps de caractéristique nulle et soit X un K-espace homogène de SL_m. Rappelons d'abord quelques groupes associés à X.

— Soit $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$, alors $\operatorname{Br} \overline{X}$ est le *groupe de Brauer géométrique* de X.

— $\operatorname{Br}_1 X = \operatorname{Ker}(\operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} \overline{X})$ est le *groupe de Brauer algébrique* de X et

$$\operatorname{Br}_{\mathrm{nr},1} X = \operatorname{Br}_1 X \cap \operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X$$

est sa *partie non ramifiée*.

— $\operatorname{Br}_0 X = \operatorname{Im}(\operatorname{Br} K \to \operatorname{Br} X) \subseteq \operatorname{Br}_{\mathrm{nr},1} X$ est le *sous-groupe des éléments constants* de $\operatorname{Br} X$.

— $\operatorname{Br}_a X = (\operatorname{Br}_1 X)/(\operatorname{Br}_0 X)$ est le *groupe de Brauer arithmétique* de X et

$$\operatorname{Br}_{\mathrm{nr},a} X = (\operatorname{Br}_{\mathrm{nr},1})/(\operatorname{Br}_0 X)$$

est sa partie non ramifiée.

— Lorsque $K = k$ est un corps de nombres, on note $X_v = X \times_k k_v$ pour toute place v de k. On définit les groupes

$$Б(X) = \operatorname{Ker}\Bigl(\operatorname{Br}_a X \to \prod_{v \in \Omega_k} \operatorname{Br}_a X_v\Bigr) = \{\alpha \in \operatorname{Br}_a X : \forall v \in \Omega_k, \alpha_v = 0\}$$

et

$$Б_\omega(X) = \{\alpha \in \operatorname{Br}_a X : \alpha_v = 0 \text{ pour presque tout } v \in \Omega_k\}.$$

Notons F le stabilisateur géométrique de X, qu'on suppose fini. Alors F est muni d'une action extérieure de Γ_K (cf. paragraphe 3A), ce qui induit une action de Γ_K sur $F^{\mathrm{ab}} = F/[F,F]$. Les groupes $\operatorname{Br}_a X$, $Б(X)$ et $Б_\omega(X)$ s'expriment en termes de F^{ab} ; c'est un argument classique qui se trouve par exemple dans [Skorobogatov 2001, Theorem 4.1.1].

Rappelons que $\hat{-}$ désigne le foncteur de dual de Cartier.

Proposition 4.1. *Soit K un corps de caractéristique nulle satisfaisant $\mathrm{H}^3(K, \overline{K}^\times) = 0$ et soit X un K-espace homogène de SL_m à stabilisateur géométrique F. On munit $\hat{F} = \operatorname{Hom}(F, \overline{K}^\times)$ de l'action de Γ_K induite par son action extérieure sur F.*

1. *On a $\operatorname{Br}_a X = \mathrm{H}^1(K, \hat{F})$.*

2. *Si $K = k$ est un corps de nombres,* $Б(X) = Ш^1(k, \hat{F})$ *et* $Б_\omega(X) = Ш^1_\omega(k, \hat{F})$.

Appliquons maintenant la proposition 4.1 aux espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii.

Corollaire 4.2. *Soient k un corps de nombres, M et Z des Γ_k-modules finis, et $\phi : M \otimes M \to Z$ un morphisme Γ_k-équivariant. À partir de ϕ, on construit l'extension*

$$0 \to Z \to F \to M \oplus M \to 0$$

de groupes abstraits comme dans le paragraphe 3B. Supposons $Z = Z(F) = [F, F]$. Si X est un espace homogène de SL_m *à stabilisateur géométrique F (muni de n'importe quelle action extérieure de Γ_k compatible avec celles sur Z et sur $M \oplus M$, pas nécessairement celle induite par l'action coordonnée par coordonnée), alors* $Б(X) = Ш^1(k, \hat{M})^2$ *et* $Б_\omega(X) = Ш^1_\omega(k, \hat{M})^2$.

Démonstration. Puisque $Z = [F, F]$, $F^{\mathrm{ab}} = F/Z = M \oplus M$ et donc $\hat{F} = \hat{F}^{\mathrm{ab}} = \hat{M} \oplus \hat{M}$. Ainsi, la proposition 4.1 donne $Б(X) = Ш^1(k, \hat{F}) = Ш^1(k, \hat{M})^2$ et $Б_\omega(X) = Ш^1_\omega(k, \hat{F}) = Ш^1_\omega(k, \hat{M})^2$. □

4B. *Étude de la flèche* $\mathbf{H}^1(K, F) \to \mathbf{H}^1(K, F^{\mathrm{ab}})$. Soit X un espace homogène de Borovoi–Kunyavskii sur un corps de nombres k. Afin de calculer le sous-groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},a} X$ de $\mathrm{Br}_a X$, on va utiliser la formule de Demarche. Il faudra étudier l'image de la flèche $\mathrm{H}^1(k_v, F) \to \mathrm{H}^1(k_v, F^{\mathrm{ab}})$ (cette image n'est pas forcément un sous-groupe de $\mathrm{H}^1(k_v, F^{\mathrm{ab}})$) pour presque toute place v de k.

On se donne alors un corps p-adique K et un K-groupe fini F. Dans le cas où F est un K-groupe constant, Demarche [2010, §3] a donné une description assez explicite du sous-groupe de $\mathrm{H}^1(K, F^{\mathrm{ab}})$ engendré par l'image de la flèche $\mathrm{H}^1(K, F) \to \mathrm{H}^1(K, F^{\mathrm{ab}})$. Nous allons adapter son argument pour le cas où F est un K-groupe *non ramifié*, c'est-à-dire que l'action du sous-groupe d'inertie de Γ_K sur F est trivial.

On note respectivement K_{nr} et K_{mr} l'extension maximale non ramifiée et modérément ramifiée de K. Soit q le cardinal du corps résiduel de K. Notons $\pi : F \to F^{\mathrm{ab}}$ la projection. Posons $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K) = \overline{\langle \sigma, \tau : \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^q \rangle}$. Par l'hypothèse que F est non ramifié, τ agit trivialement sur F. Étudions la flèche $\pi_* : \mathrm{H}^1(\Gamma, F) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, F^{\mathrm{ab}})$.

Soit $f : \Gamma \to F$ un cocycle. Comme τ agit trivialement sur F, on a

$$f(\tau)^q = f(\tau^q) = f(\sigma\tau\sigma^{-1}) = f(\sigma)\,{}^\sigma\! f(\tau)\,{}^{\sigma\tau}\! f(\sigma^{-1}) = f(\sigma)\,{}^\sigma\! f(\tau)\,{}^\sigma\! f(\sigma^{-1}).$$

Comme $1 = f(1) = f(\sigma\sigma^{-1}) = f(\sigma)\,{}^\sigma\! f(\sigma^{-1})$, on obtient ${}^\sigma\! f(\sigma^{-1}) = f(\sigma)^{-1}$ et donc

$$f(\tau)^q = f(\sigma)\,{}^\sigma\! f(\tau) f(\sigma)^{-1}.$$

Inversement, soient $a, b \in F$ tels que $a\,{}^\sigma b a^{-1} = b^q$. Alors il existe un unique cocycle $f : \Gamma \to F$ tel que $f(\sigma) = a$ et $f(\tau) = b$.

Définition 4.3. On appelle *q-relevable* tout élément $\bar{b} \in F^{\mathrm{ab}}$ ayant un relevé $b \in F$ tel que b^q soit conjugué à ${}^\sigma b$ (en particulier, ${}^\sigma\bar{b} = \bar{b}^q$).

L'inverse d'un élément q-relevable est encore q-relevable.

Si $f, g : \Gamma \to F^{\mathrm{ab}}$ sont deux cocycles cohomologues, alors $f(\tau) = g(\tau)$ (car l'action de τ sur F est triviale), donc $f(\tau)$ est q-relevable si et seulement si $g(\tau)$ l'est aussi.

On note $I(F)$ l'image de la flèche $\pi_* : \mathrm{H}^1(\Gamma, F) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, F^{\mathrm{ab}})$, et $J(F)$ le sous-ensemble de $\mathrm{H}^1(\Gamma, F^{\mathrm{ab}})$ formé des classes des cocycles f tels que $f(\tau)$ soit q-relevable. Alors c'est évident que $I(F) \subseteq J(F)$, et que $J(F)$ est stable par l'inversion.

Lemme 4.4. *Les sous-groupes de* $\mathrm{H}^1(\Gamma, F^{\mathrm{ab}})$ *engendrés par* $I(F)$ *et par* $J(F)$ *coïncident.*

Démonstration. Soit $f : \Gamma \to F^{\mathrm{ab}}$ un cocycle tel que $[f] \in J(F)$. Il existe un relevé $b \in F$ de $f(\tau)$ et un élément $a \in F$ tel que $a^{\sigma}ba^{-1} = b^q$. Soit $\tilde{f}_1 : \Gamma \to F^{\mathrm{ab}}$ le cocycle déterminé par $\tilde{f}_1(\sigma) = a$ et $\tilde{f}_1(\tau) = b$. Posons $f_1 = \pi \circ \tilde{f}_1$, alors $f_1(\sigma) = \pi(a)$ et $f_1(\tau) = f(\tau)$.

Soit $a' \in F$ un relevé de $\pi(a)^{-1} f(\sigma)$. Soit $\tilde{f}_2 : \Gamma \to F$ le cocycle déterminé par $\tilde{f}_2(\sigma) = a'$ et $\tilde{f}_2(\tau) = 1$. Posons $f_2 = \pi \circ \tilde{f}_2$, alors $f_1(\sigma) f_2(\sigma) = f(\sigma)$ et $f_1(\tau) f_2(\tau) = f(\tau)$, donc $[f] = [f_1] + [f_2] \in \mathrm{H}^1(\Gamma, F^{\mathrm{ab}})$. Comme $[f_1], [f_2] \in I(F)$, $[f]$ appartient au sous-groupe engendré par $I(F)$. $\square$

Proposition 4.5. *Soit K un corps p-adique et notons q le cardinal du corps résiduel de K. Soit* $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K)$ *un relevé de l'automorphisme de Frobenius. Soit F un K-groupe fini non ramifié de cardinal $|F| < p$. Alors on a équivalence entre* :

1. $\mathrm{H}^1(K, F^{\mathrm{ab}})$ *est engendré par l'image de la flèche* $\mathrm{H}^1(K, F) \to \mathrm{H}^1(K, F^{\mathrm{ab}})$.
2. *Le sous-groupe* $\{a \in F^{\mathrm{ab}} : {}^{\sigma}a = a^q\}$ *de* F^{ab} *est engendré par les éléments q-relevables.*

Démonstration. Pour tout cocycle $f : \Gamma_K \to F$, l'ensemble $\{\upsilon \in \Gamma_K : f(\upsilon) = 1\}$ est un sous-groupe ouvert de Γ_K. Il correspond à une extension finie L/K. On vérifie sans peine que pour tous $\upsilon, \upsilon' \in \Gamma_K$, $f(\upsilon') = f(\upsilon)$ équivaut à $\upsilon' \in \upsilon\Gamma_L$. En particulier, $[L : K] = [\Gamma_K : \Gamma_L] \leq |F| < p$, donc L/K est modérément ramifiée. Ainsi, tout cocycle $\Gamma_K \to F$ se factorise par un cocycle $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K) \to F$ et il en va de même pour F^{ab}. Donc le premier point équivaut à dire que $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K), F^{\mathrm{ab}})$ est engendré par l'image $I(F)$ de la flèche $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K), F) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K), F^{\mathrm{ab}})$.

Soit τ un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K_{\mathrm{nr}})$, de sorte que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^q$.

Supposons 1. Soit $a \in F^{\mathrm{ab}}$ satisfaisant ${}^{\sigma}a = a^q$. Alors on peut définir un cocycle

$$f : \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K) \to F^{\mathrm{ab}}$$

par $f(\sigma) = 1$ et $f(\tau) = a$. Comme $I(F) \subseteq J(F)$, on peut écrire $[f] = [f_1] + \cdots + [f_r]$, où $[f_i] \in J(F)$, c'est-à-dire que chacun des $f_i(\tau)$ est q-relevable. Or τ agit trivialement sur F^{ab}, donc $a = f(\tau) = f_1(\tau) \cdots f_r(\tau)$, d'où 2.

Supposons 2. Soit $f : \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K) \to F^{\mathrm{ab}}$ un cocycle. Alors ${}^{\sigma}f(\tau) = f(\tau)^q$ et donc $f(\tau) = \bar{b}_1 \cdots \bar{b}_r$, où chaque $\bar{b}_i \in F^{\mathrm{ab}}$ est q-relevable. Définissons les cocycles $f_i : \mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K) \to F^{\mathrm{ab}}$ par

$$\begin{aligned} &f_1(\sigma) = f(\sigma), \quad && f_1(\tau) = \bar{b}_1, \\ &f_i(\sigma) = 1, && f_i(\tau) = \bar{b}_i, \quad i = 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Alors $[f_i] \in J(F)$ et $[f] = [f_1] + \cdots + [f_r]$, donc $[f]$ appartient au sous-groupe engendré par $J(F)$. Par le lemme 4.4, $[f]$ appartient au sous-groupe engendré par l'image de $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K), F) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{mr}}/K), F^{\mathrm{ab}})$, d'où 1. □

4C. *Groupe de Brauer arithmétique.* Nous allons maintenant combiner l'analyse du paragraphe 4B avec la formule de Demarche pour calculer le groupe de Brauer arithmétique non ramifié d'un espace homogène de Borovoi–Kunyavskii.

Rappelons d'abord la dualité locale de Tate (voir par exemple [Harari 2017, chapitre 10]). Soit K un corps p-adique K et soit A un Γ_K-module fini, alors l'accouplement

$$\mathrm{H}^1(K, \hat{A}) \times \mathrm{H}^1(K, A) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (\alpha, a) \mapsto \mathrm{inv}_K(\alpha \cup a)$$

est une dualité parfaite de groupes abéliens finis.

Proposition 4.6. *Soient k un corps de nombres, M et Z des Γ_k-modules finis, et $\phi : M \otimes M \to Z$ un morphisme Γ_k-équivariant. À partir de ϕ, on construit l'extension*

$$0 \to Z \to F \to M \oplus M \to 0$$

de groupes abstraits comme dans le paragraphe 3B. Supposons $Z = Z(F) = [F, F]$.

1. *On munit F de l'action coordonnée par coordonnée de Γ_k. Alors le groupe $\mathrm{H}^1(k_v, F^{\mathrm{ab}})$ est engendré par l'image de la flèche $\mathrm{H}^1(k_v, F) \to \mathrm{H}^1(k_v, F^{\mathrm{ab}})$ pour presque tout $v \in \Omega_k$.*
2. *Soit X est un espace homogène de SL_m à stabilisateur géométrique F, muni de l'action extérieure de Γ_k induite par l'action coordonnée par coordonnée. Alors $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},a} X = Б_\omega(X) = Ш^1_\omega(k, \hat{M})^2$.*

Démonstration. 1. Soit L/k une extension finie galoisienne déployant F. Soit v une place de k qui est non ramifiée dans L/k, et qui divise un nombre premier impair $p > |F|$. On va démontrer que $\mathrm{H}^1(k_v, F^{\mathrm{ab}})$ est engendré par l'image de la flèche $\mathrm{H}^1(k_v, F) \to \mathrm{H}^1(k_v, F^{\mathrm{ab}})$. Au vu de la proposition 4.5, il suffit de démontrer que tout élément $a \in F^{\mathrm{ab}}$ satisfaisant ${}^\sigma a = qa$ est q-relevable, où q est le cardinal du corps résiduel de k_v et où $\sigma \in \mathrm{Gal}(k_{v,\mathrm{mr}}/k_v)$ est un relevé de l'automorphisme de Frobenius. Notons que $F^{\mathrm{ab}} = F/[F, F] = F/Z = M \oplus M$.

Rappelons de (3-1) qu'on dispose d'une application biadditive

$$\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z, \quad ((x, y), (x', y')) \mapsto \phi(x \otimes y').$$

Soit $a = (x, y) \in M \oplus M$ tel que ${}^\sigma a = qa$ et montrons que a est q-relevable. Considérons alors le relevé $(0, a) \in F$ de a. On va démontrer que $(0, a)^q$ est conjugué à ${}^\sigma(0, a) = (0, qa)$. À l'aide de (3-2), on peut calculer

$$(0, a)^q = \bigl(\tfrac{1}{2}q(q-1)\Phi(a, a), qa\bigr) \tag{4-1}$$

par récurrence. Soit $a' = \bigl(\tfrac{1}{2}(q+1)x, y\bigr)$. Alors

$$\Phi(qa, a') = \phi(qx \otimes y) = q\Phi(a, a) \quad \text{et} \quad \Phi(a', qa) = \phi\bigl(\tfrac{1}{2}(q+1)x \otimes qy\bigr) = \tfrac{1}{2}q(q+1)\Phi(a, a). \tag{4-2}$$

On a

$$\begin{aligned}(0,a')(0,qa)(0,a')^{-1} &= (\Phi(a',qa)-\Phi(qa,a'),qa) && \text{(par le lemme 3.5)}\\ &= \big(\tfrac{1}{2}q(q+1)\Phi(a,a)-q\Phi(a,a),qa\big) && \text{(par (4-2))}\\ &= \big(\tfrac{1}{2}q(q-1)\Phi(a,a),qa\big)\\ &= (0,a)^q && \text{(par (4-1))},\end{aligned}$$

donc $(0,a)^q$ est bien conjugué à $(0,qa)={}^{\sigma}(0,a)$, d'où a est q-relevable. Cela nous permet de conclure que $\mathrm{H}^1(k_v,F^{\mathrm{ab}})$ est engendré par l'image de $\mathrm{H}^1(k_v,F)\to\mathrm{H}^1(k_v,F^{\mathrm{ab}})$ pour presque toute place v de k.

2. Rappelons que $\mathrm{Br}_a X=\mathrm{H}^1(k,\hat{F})=\mathrm{H}^1(k,\hat{M})^2$ et que $\mathrm{Br}_a X_v=\mathrm{H}^1(k_v,\hat{F})=\mathrm{H}^1(k_v,\hat{M})^2$ pour toute place v de k ; cf. proposition 4.1. Soit $\eta_0\in\mathrm{H}^2(k,F)$ la classe neutre privilégiée (où F est muni de l'action coordonnée par coordonnée de Γ_k). Alors il existe une unique classe $\beta\in\mathrm{H}^2(k,Z)$ telle que la classe de Springer de X vaut $\eta_X=\beta\cdot\eta_0$ (cf. paragraphe 3A). Pour presque tout $v\in\Omega_k$, on a $\beta_v=0\in\mathrm{H}^2(k_v,Z)$, donc $\mathrm{loc}_v(\eta_X)=\mathrm{loc}_v(\eta_0)$, ou X_v est k_v-isomorphe à $F\backslash\mathrm{SL}_m$ (voir proposition 3.3). Par la formule de Demarche [2010, théorème 1], un élément $\alpha\in\mathrm{Br}_a X$ appartient à $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},a} X$ si et seulement si pour presque tout $v\in\Omega_k$, l'image de α_v dans $\mathrm{H}^1(k_v,\hat{F})$ est orthogonale à l'image de $\mathrm{H}^1(k_v,F)\to\mathrm{H}^1(k_v,F^{\mathrm{ab}})$. Par dualité locale de Tate, cette dernière propriété signifie que $\alpha_v=0$ pour presque tout $v\in\Omega_k$, i.e., que $\alpha\in Б_\omega(X)$. Ainsi, $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr},a} X=Б_\omega(X)=Ш^1_\omega(k,\hat{F})=Ш^1_\omega(k,\hat{M})^2$. $\square$

4D. *Groupe de Brauer géométrique.* Dans ce paragraphe, soit K un corps *algébriquement clos* de caractéristique nulle. Pour calculer le groupe de Brauer géométrique non ramifié des espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii, on rappelle la formule suivante de Bogomolov [1987, §3].

Proposition 4.7. *Soit F un groupe fini, vu comme K-groupe. On choisit un plongement $F\hookrightarrow\mathrm{SL}_m$ de K-groupes et l'on pose $X=F\backslash\mathrm{SL}_m$. Alors*

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} X=B_0(F):=\mathrm{Ker}\Big(\mathrm{H}^2(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to\prod_A\mathrm{H}^2(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\Big),$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de F.

Lorsque F est nilpotent de classe 2, on dispose d'un morphisme

$$\lambda_F:\bigwedge^2 F^{\mathrm{ab}}\to Z,\qquad \lambda(a\wedge b)=[\tilde{a},\tilde{b}],\tag{4-3}$$

où $Z=Z(F)$ et où $\tilde{a},\tilde{b}\in F$ sont des relevés respectifs de $a,b\in F^{\mathrm{ab}}$. Si de plus $Z=[F,F]$, c'est-à-dire que λ_F est surjectif (par exemple, pour les espaces homogènes de Borovoi–Kunyavskii), le groupe $B_0(F)$ a la description explicite en [Bogomolov 1987, Lemma 5.1]. (En fait, l'énoncé dans loc. cit. demande que F soit un p-groupe, mais sa démonstration vaut pour F de cardinal quelconque.) Un énoncé similaire se trouve dans [Moravec 2012, §5]. On rappellera la preuve pour la commodité du lecteur.

Lemme 4.8. *Soit F un groupe fini vérifiant $Z(F)=[F,F]$. Notons $Z=Z(F)$ et $\lambda=\lambda_F$ le morphisme surjectif défini par (4-3). Alors $B_0(F)=\mathrm{Hom}(S/S_\lambda,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, où $S=\mathrm{Ker}\,\lambda$ et où S_λ est le sous-groupe de S engendré par $S\cap\{a\wedge b:a,b\in F^{\mathrm{ab}}\}$.*

Démonstration. La première étape est de montrer que $B_0(F)$ est inclus dans l'image du morphisme d'inflation $\pi^* : \mathrm{H}^2(F^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (où $\pi : F \to F^{\mathrm{ab}}$ désigne la projection). C'est le lemme 3.5 dans [Bogomolov 1987] : dans la suite spectrale de Hochschild–Serre $\mathrm{H}^p(F^{\mathrm{ab}}, \mathrm{H}^q(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, le groupe $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ admet une filtration $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2$, où $E_0 \subseteq \mathrm{H}^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est l'image de π^*, où $E_1/E_0 \subseteq \mathrm{H}^1(F^{\mathrm{ab}}, \mathrm{H}^1(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$, et où $E_2/E_1 \subseteq \mathrm{H}^2(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Pour tout $\alpha \in B_0(F)$, son image (par restriction) dans $\mathrm{H}^2(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est nulle, on peut alors considérer son image β dans $\mathrm{H}^1(F^{\mathrm{ab}}, \mathrm{H}^1(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = \mathrm{Hom}(F^{\mathrm{ab}}, \mathrm{Hom}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$. Il suffit de montrer que $\beta = 0$. En effet, soit $C \subseteq F^{\mathrm{ab}}$ n'importe quel sous-groupe cyclique. On dispose de la suite spectrale de Hochschild–Serre $\mathrm{H}^p(C, \mathrm{H}^q(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\pi^{-1}(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, d'où une filtration $\tilde{E}_0 \subseteq \tilde{E}_1 \subseteq \tilde{E}_2$ compatible avec celle mentionnée ci-dessus. Le sous-groupe $\pi^{-1}(C) \subseteq F$ est abélien (c'est une extension centrale du groupe cyclique C). La classe α étant dans $B_0(F)$, elle se restreint à $0 \in \mathrm{H}^2(\pi^{-1}(C), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, donc on a $\beta|_C = 0 \in \mathrm{H}^1(C, \mathrm{H}^1(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$. Cela implique que $\beta = 0$, ou $\alpha \in E_0 = \mathrm{Im}\,\pi^*$.

La deuxième étape est de décrire $\mathrm{Im}\,\pi^*$. Il est connu qu'on a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^2(F^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}\Big(\bigwedge^2 F^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big) \tag{4-4}$$

qui à la classe $[E]$ de toute extension centrale $0 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to E \to F^{\mathrm{ab}} \to 0$ associe le morphisme $\lambda_E : \bigwedge^2 F^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ défini par (4-3). Si $\pi^*[E] = 0 \in \mathrm{H}^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, la projection $\pi : F \to F^{\mathrm{ab}}$ se relève en un morphisme $\rho : F \to E$. Dans ce cas, ρ induit un morphisme $\chi : Z \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ satisfaisant $\lambda_E = \chi \circ \lambda$. Inversement, supposons qu'il existe un morphisme $\chi : Z \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $\lambda_E = \chi \circ \lambda$, alors $[E] = \chi_*[F]$, où $\chi_* : \mathrm{H}^2(F^{\mathrm{ab}}, Z) \to \mathrm{H}^2(F^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est le morphisme induit par χ. Or $\pi^*[F] = 0 \in \mathrm{H}^2(F, Z)$, donc $\pi^*[E] = 0 \in \mathrm{H}^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ puisque les opérateurs π^* et χ_* commutent. On en déduit que sous l'identification de (4-4), $\mathrm{Ker}\,\pi^*$ correspond au sous-groupe $\mathrm{Hom}(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{Hom}\big(\bigwedge^2 F^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$ (l'inclusion étant induite par la surjection λ). On conclut que $\mathrm{Im}\,\pi^* = \mathrm{Hom}(S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Soit maintenant $0 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to E \to F^{\mathrm{ab}} \to 0$ une extension centrale et $\chi : S \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la restriction de λ_E. Soient $a, b \in F^{\mathrm{ab}}$ tels que $a \wedge b \in S$, et relevons-les respectivement en $\tilde{a}, \tilde{b} \in F$. Comme $a \wedge b \in S$, la formule (4-3) implique que $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ commutent, donc le sous-groupe $\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \subseteq F$ est abélien. Si $[E] \in B_0(F)$, la composée $\bigwedge^2 \langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle \to \bigwedge^2 F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\lambda_E} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est nulle, donc en particulier $\chi(a \wedge b) = \lambda_E(a \wedge b) = 0$. Ainsi, $[E] \in B_0(F)$ implique $\chi|_{S_\lambda} = 0$. Inversement, supposons $\chi|_{S_\lambda} = 0$. Soit $A \subseteq F$ un sous-groupe abélien. Pour tous $\tilde{a}, \tilde{b} \in A$, on a $\lambda(a \wedge b) = 0$ (où $a = \pi(\tilde{a})$ et $b = \pi(\tilde{b})$), donc $a \wedge b \in S_\lambda$, d'où $\lambda_E(a \wedge b) = \chi(a \wedge b) = 0$. La composée $\bigwedge^2 A \to \bigwedge^2 F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\lambda_E} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est nulle, donc $[E] \mapsto 0 \in \mathrm{H}^2(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. On en déduit que $[E] \in B_0(F)$. Ainsi

$$B_0(F) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(S_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = \mathrm{Hom}(S/S_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \qquad \square$$

Proposition 4.9. *Soient M et Z des groupes abéliens, $\phi : M \otimes M \to Z$ un morphisme, à partir desquels on construit une extension*

$$0 \to Z \to F \to M \oplus M \to 0$$

de groupes abstraits comme dans le paragraphe 3B, vue comme extension de K-groupes finis. Supposons $Z = Z(F) = [F, F]$, soit $F \hookrightarrow \mathrm{SL}_m$ un plongement de K-groupes et notons $X = F\backslash \mathrm{SL}_m$. Alors $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, X = \mathrm{Hom}((\mathrm{Ker}\,\phi)/H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, où H est le sous-groupe $\langle x \otimes y : x, y \in M, \phi(x \otimes y) = 0\rangle$ de $M \otimes M$.

Démonstration. Sous l'identification $\bigwedge^2(M \oplus M) = \big(\bigwedge^2 M\big) \oplus (M \otimes M) \oplus \big(\bigwedge^2 M\big)$, on a

$$(x, y) \wedge (x', y') = (x \wedge x', x \otimes y', y \wedge y')$$

pour tous $x, y, x', y' \in M$. Soit $\lambda = \lambda_F : \bigwedge^2(M \oplus M) \to Z$ le morphisme défini par (4-3). On note $\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z$ l'application biadditive définie par (3-1). Par le lemme 3.5, on a

$$\lambda(x \wedge y, 0, 0) = \lambda((x, 0) \wedge (y, 0)) = \Phi((x, 0), (y, 0)) - \Phi((y, 0), (x, 0)) = \phi(x \otimes 0) - \phi(y \otimes 0) = 0,$$

$$\lambda(0, x \otimes y, 0) = \lambda((x, 0) \wedge (0, y)) = \Phi((x, 0), (0, y)) - \Phi((0, y), (x, 0)) = \phi(x \otimes y) - \phi(0 \otimes 0) = \phi(x \otimes y),$$

$$\lambda(0, 0, x \wedge y) = \lambda((0, x) \wedge (0, y)) = \Phi((0, x), (0, y)) - \Phi((0, y), (0, x)) = \phi(0 \otimes y) - \phi(0 \otimes x) = 0.$$

On en déduit que $\lambda(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \phi(\gamma_2)$ pour tous $\gamma_1, \gamma_3 \in \bigwedge^2 M$ et $\gamma_2 \in M \otimes M$, d'où $S = \mathrm{Ker}\,\lambda = \bigwedge^2(M \oplus M) = \big(\bigwedge^2 M\big) \oplus (\mathrm{Ker}\,\phi) \oplus \big(\bigwedge^2 M\big)$, au vu des notations du lemme 4.8.

Nous affirmons que $S_\lambda = \bigwedge^2(M \oplus M) = \big(\bigwedge^2 M\big) \oplus H \oplus \big(\bigwedge^2 M\big)$. En effet, soient $x, y, x', y' \in M$. Alors $\lambda((x, y) \wedge (x', y')) = \lambda'(x \wedge x', x \otimes y', y \wedge y') = \phi(x \otimes y')$, donc $(x, y) \wedge (x', y') \in S$ si et seulement si $\phi(x \otimes y') = 0$. Dans ce cas, $x \otimes y' \in H$ par définition, d'où $S_\lambda \subseteq \big(\bigwedge^2 M\big) \oplus H \oplus \big(\bigwedge^2 M\big)$. Inversement :

— $\big(\bigwedge^2 M\big) \oplus \{0\} \oplus \{0\} \subseteq S_\lambda$ puisque $(x \wedge y, 0, 0) = (x, 0) \wedge (y, 0) \in S$ pour tous $x, y \in M$.

— $\{0\} \oplus \{0\} \oplus \big(\bigwedge^2 M\big) \subseteq S_\lambda$ puisque $(0, 0, x \wedge y) = (0, x) \wedge (0, y) \in S$ pour tous $x, y \in M$.

— $\{0\} \oplus H \oplus \{0\} \subseteq S_\lambda$ puisque $(0, x \otimes y, 0) = (x, 0) \wedge (0, y) \in S$ pour tous $x, y \in M$ tels que $\phi(x \otimes y) = 0$.

Ces propriétés impliquent que $S_\lambda = \big(\bigwedge^2 M\big) \oplus H \oplus \big(\bigwedge^2 M\big)$ comme voulu. Finalement, $S/S_\lambda = (\mathrm{Ker}\,\phi)/H$ et donc la proposition 4.7 donne $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, X = B_0(F) = \mathrm{Hom}(S/S_\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}((\mathrm{Ker}\,\phi)/H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. □

5. Les principaux résultats

5A. *Un lemme arithmétique.* Pour établir les principaux résultats de ce texte, une propriété globale du symbole de Hilbert est nécessaire. On propose la généralisation suivante de [Serre 1970, chapitre III, §2.2, théorème 4].

Proposition 5.1 (« Lemme arithmétique » pour les groupes cycliques). *Soient k un corps de nombres, n un entier et $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de $\mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/n)$. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in (\mathrm{Br}\,k)^{|I|}$ remplissant la condition suivante : pour tout $v \in \Omega_k$, il existe $c_v \in \mathrm{H}^1(k_v, \mu_n)$ tel que $(a_i)_v \cup c_v = (\lambda_i)_v$ pour tout $i \in I$. Alors pour tout sous-ensemble fini $S \subseteq \Omega_k$, il existe $b \in \mathrm{H}^1(k, \mu_n)$ tel que :*

1. *$a_i \cup b = \lambda_i$ pour tout $i \in I$.*
2. *$b_v = c_v$ pour tout $v \in S$.*

La preuve de la proposition 5.1 repose sur des théorèmes de dualité arithmétique. Pour les détails de la théorie de la dualité arithmétique, on pourra consulter [Harari 2017, chapitre 17]. Rappelons alors quelques notations. Soit k un corps de nombres et soit A un Γ_k-module fini. Pour toute place finie v de k telle que A soit un Γ_{k_v}-module non ramifié, on note $\mathrm{H}^1_{\mathrm{nr}}(k_v, A)$ l'image de la flèche d'inflation $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(k_{v,\mathrm{nr}}/k_v), A) \to \mathrm{H}^1(k_v, A)$. Notons $\mathbb{P}^1(k, A)$ le produit restreint $\prod'_{v\in\Omega_k} \mathrm{H}^1(k_v, A)$ par rapport aux sous-groupes $\mathrm{H}^1_{\mathrm{nr}}(k_v, A)$. On dispose d'une application diagonale de $\mathrm{H}^1(k, A)$ dans $\mathbb{P}^1(k, A)$. En rassemblant les dualités locales de Tate entre $\mathrm{H}^1(k_v, A)$ et $\mathrm{H}^1(k_v, \hat{A})$, on obtient un accouplement parfait de groupes abéliens localement compacts

$$\mathbb{P}^1(k, A) \times \mathbb{P}^1(k, \hat{A}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad ((a_v)_{v\in\Omega_k}, (b_v)_{v\in\Omega_k}) \mapsto \sum_{v\in\Omega_k} \mathrm{inv}_v(a_v \cup b_v).$$

Démonstration de la proposition 5.1. Calculons le sous-groupe

$$P = \mathrm{Im}(\mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/n) \to \mathbb{P}^1(k, \mathbb{Z}/n)) \cap \left(\prod_{v\in S} \mathrm{H}^1(k_v, \mathbb{Z}/n) \times \prod_{v\in\Omega_k\setminus S} \langle (a_i)_v : i \in I\rangle \right)$$

de $\mathbb{P}^1(k, \mathbb{Z}/n)$. Soit alors $a \in \mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/n)$ tel que pour tout $v \notin S$, a_v soit une combinaison linéaire des $(a_i)_v$, $i \in I$. On voit les a_i et a comme des morphismes continus $\Gamma_k \to \mathbb{Z}/n$; alors il existe un quotient G de Γ_k, qui est fini, abélien et de n-torsion, par lequel ces morphismes se factorisent. Notons $a'_i, a' \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/n)$ les morphismes induits respectifs. La condition sur a et le théorème de Chebotarev impliquent que $a'|_H \in \langle a'_i|_H : i \in I\rangle$ pour tout sous-groupe cyclique H de G. En appliquant cette condition à chaque sous-groupe cyclique de $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(a'_i)$, on voit que a' s'annule sur $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(a'_i)$. Au vu de l'accouplement parfait entre G et $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/n)$, a' est orthogonal à $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(a'_i)$, qui est l'orthogonal de $\langle a'_i : i \in I\rangle$, ainsi $a' \in \langle a'_i : i \in I\rangle$. Il s'ensuit que $a \in \langle a_i : i \in I\rangle$ et on conclut que $P = \langle ((a_i)_v)_{v\in\Omega_k} : i \in I\rangle$.

Lorsque $v \in \Omega_k \setminus S$ est une place telle que $(\lambda_i)_v = 0$ pour tout $i \in I$, on peut supposer que $c_v = 0$. Cela implique que $(c_v)_{v\in\Omega_k} \in \bigoplus_{v\in\Omega_k} \mathrm{H}^1(k_v, \mu_n) \subseteq \mathbb{P}^1(k, \mu_n)$. Au vu de l'accouplement parfait entre $\mathbb{P}^1(k, \mathbb{Z}/n)$ et $\mathbb{P}^1(k, \mu_n)$, la loi de réciprocité globale implique que $(c_v)_{v\in\Omega_k}$ est orthogonal à $((a_i)_v)_{v\in\Omega_k}$ pour tout $i \in I$, i.e., il est orthogonal à P. Or l'orthogonal de $\mathrm{Im}(\mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/n) \to \mathbb{P}^1(k, \mathbb{Z}/n))$ est $\mathrm{Im}(\mathrm{H}^1(k, \mu_n) \to \mathbb{P}^1(k, \mu_n))$ (c'est l'exactitude au 5ᵉ terme de la suite exacte à neuf termes de Poitou–Tate, cf. [Harari 2017, théorème 17.13]), donc

$$P^\perp = \mathrm{Im}(\mathrm{H}^1(k, \mu_n) \to \mathbb{P}^1(k, \mu_n)) + \prod_{v\in S}\{0\} \times \prod'_{v\in\Omega_k\setminus S} \langle (a_i)_v : i \in I\rangle^\perp,$$

donc il existe $b \in \mathrm{H}^1(k, \mu_n)$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. Pour tout $v \in S$, $b_v - c_v = 0$ pour tout $v \in S$.
2. Pour tout $v \notin S$, $b_v - c_v$ est orthogonal aux $(a_i)_v$, $i \in I$.

On a ainsi que $(a_i \cup b)_v = (a_i)_v \cup c_v = (\lambda_i)_v$ pour tous $i \in I$ et $v \in \Omega_k$ (d'où $a_i \cup b = \lambda_i$ par la loi de réciprocité globale) et que $b_v = c_v$ pour tout $v \in S$. La proposition est finalement démontrée. □

La proposition 5.1 se généralise en la proposition 5.2 ci-dessous. Afin de la démontrer, remarquons le fait suivant : soient m et n deux entiers, soit $d = \mathrm{PGCD}(m, n)$, et soit K un corps de caractéristique nulle.

Alors l'on dispose d'un diagramme commutatif de Γ_K-modules, dont les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/m \otimes \mu_n \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\iota_n^m \otimes \mathrm{id}"] & \mu_d \arrow[d, hook] \\ \mathbb{Z}/n \otimes \mu_n \arrow[r, "\simeq"] & \mu_n \end{tikzcd}$$

et dont le morphisme ι_n^m est la composée

$$\mathbb{Z}/m \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/d \hookrightarrow \mathbb{Z}/n. \tag{5-1}$$

Il s'ensuit qu'il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/m) \times \mathrm{H}^1(K, \mu_n) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "(\iota_n^m)_*" ', shift right=10] \arrow[d, equal, shift left=10] & (\mathrm{Br}\, K)[d] \arrow[d, hook] \\ \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n) \times \mathrm{H}^1(K, \mu_n) \arrow[r, "\cup"] & (\mathrm{Br}\, K)[n] \end{tikzcd} \tag{5-2}$$

D'ailleurs, dans le cas où K contient $\mu_{\mathrm{PPCM}(m,n)}$ (un générateur duquel sera fixé), on dispose d'un diagramme commutatif de Γ_K-modules, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \overline{K}^\times \arrow[r, "(-)^m"] \arrow[d, "(-)^{m/d}"] & \overline{K}^\times \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/d \arrow[r] \arrow[d, hook] & \overline{K}^\times \arrow[r, "(-)^d"] \arrow[d, equal] & \overline{K}^\times \arrow[r] \arrow[d, "(-)^{n/d}"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n \arrow[r] & \overline{K}^\times \arrow[r, "(-)^n"] & \overline{K}^\times \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r] \arrow[d, "(-)^{n/d}"] & \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/m) \arrow[d, "(\iota_n^m)_*"] \\ K^\times \arrow[r] & \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n) \end{tikzcd} \tag{5-3}$$

dont les flèches horizontales sont des morphismes de la théorie de Kummer.

Proposition 5.2 (« Lemme arithmétique » pour les groupes abéliens finis). *Soient k un corps de nombres, A un groupe abélien fini muni de l'action triviale de Γ_k, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de $\mathrm{H}^1(k, A)$. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathrm{H}^2(k, A\otimes \hat{A})^{|I|}$ remplissant la condition suivante : pour tout $v \in \Omega_k$, il existe $c_v \in \mathrm{H}^1(k_v, \hat{A})$ tel que $(a_i)_v \cup c_v = (\lambda_i)_v$ pour tout $i \in I$. Alors pour tout sous-ensemble fini $S \subseteq \Omega_k$, il existe $b \in \mathrm{H}^1(k, \hat{A})$ tel que :*

1. *$a_i \cup b = \lambda_i$ pour tout $i \in I$.*

2. *$b_v = c_v$ pour tout $v \in S$.*

Démonstration. Écrivons $A = \prod_{p\in J} \mathbb{Z}/n_p$ (alors $\hat{A} = \prod_{q\in J} \mu_{n_q}$), et $d_{p,q} = \mathrm{PGCD}(n_p, n_q)$ pour tous $p, q \in J$. De plus, pour tous $i \in I$ et $v \in \Omega_k$, écrivons

$$a_i = (a_i^p)_{p\in J} \in \mathrm{H}^1(k, A) = \prod_{p\in J} \mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/n_p),$$
$$c_v = (c_v^q)_{q\in J} \in \mathrm{H}^1(k_v, \hat{A}) = \prod_{q\in J} \mathrm{H}^1(k_v, \mu_{n_q}),$$
$$\lambda_i = (\lambda_i^{p,q})_{p,q\in J} \in \mathrm{H}^2(k, A\otimes \hat{A}) = \prod_{p,q\in J} (\mathrm{Br}\, k)[d_{p,q}].$$

La condition $(a_i)_v \cup c_v = (\lambda_i)_v$ se réécrit sous la forme

$$((\iota_{n_q}^{n_p})_* a_i^p)_v \cup c_v^q = (a_i^p)_v \cup c_v^q = (\lambda_i^{p,q})_v \quad \forall p, q \in J \tag{5-4}$$

par biadditivité des cup-produits et au vu de (5-2), où $\iota_{n_q}^{n_p} : \mathbb{Z}/n_p \to \mathbb{Z}/n_q$ est défini comme la composée (5-1). Fixons $q \in J$ et appliquons la proposition 5.1 à la famille $((\iota_{n_q}^{n_p})_* a_i^p)_{i\in I, p\in J}$ pour trouver un $b^q \in \mathrm{H}^1(k, \mu_{n_q})$ tel que :

1. $a_i^p \cup b^q = \lambda_i^{p,q}$ pour tous $i \in I$ et $p \in J$.
2. $b_v^q = c_v^q$ pour tout $v \in S$.

Posons finalement $b = (b^q)_{q\in J} \in \mathrm{H}^1(k, \hat{A})$. Alors $a_i \cup b = \lambda_i$ (par biadditivité des cup-produits), et $b_v = c_v$ pour tout $v \in S$, ce qui achève la démonstration. □

Afin d'appliquer la proposition 5.2, il convient de prouver l'énoncé suivant.

Lemme 5.3. *Soient (K, v) un corps p-adique et n un entier tels que K contienne μ_n. Soit d un diviseur de n et soit $\tilde{a} \in K^\times$ tel que $v(\tilde{a})$ soit premier à d. Soit a son image dans $\mathrm{H}^1(k, \mu_n)$ par la théorie de Kummer. Alors pour tout $r \in (1/d)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, il existe $b \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n)$ tel que $\mathrm{inv}_K(a \cup b) = r$.*

Démonstration. Posons $A := \{\mathrm{inv}_K(a \cup b) : b \in \mathrm{H}^1(K, \mathbb{Z}/n)\} \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et montrons que A contient $1/d$.

Commençons par le cas où $d = n$. Il suffit de montrer que pour tout nombre premier ℓ divisant n, A contient $1/\ell^{v_\ell(n)}$. En effet, comme ℓ ne divise pas $v(\tilde{a})$, on a $(\tilde{a})^{n/\ell} \notin K^{\times n}$ et donc $(n/\ell)a \neq 0$. Par dualité locale de Tate, il existe $b \in \mathrm{H}^1(k, \mathbb{Z}/n)$ tel que $\mathrm{inv}_K((n/\ell)a \cup b) \neq 0$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Écrivons $\mathrm{inv}_K(a \cup b) = t/n$ avec $t \in \mathbb{Z}$, alors $\mathrm{inv}_K((n/\ell)a \cup b) = (n/\ell)\,\mathrm{inv}_K(a \cup b) = t/\ell$ est non nul dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, d'où ℓ ne divise pas t. Or A contient $\mathrm{inv}_K(a \cup (n/\ell^{v_\ell(n)})b) = (n/\ell^{v_\ell(n)})\,\mathrm{inv}_K(a \cup b) = t/\ell^{v_\ell(n)}$, donc il contient $1/\ell^{v_\ell(n)}$. Ainsi, A contient $1/n$ comme voulu.

Revenons au cas général. On a un diagramme commutatif de Γ_K-modules

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] \arrow[d, "(-)^{n/d}"] & \overline{K}^\times \arrow[r, "(-)^n"] \arrow[d, "(-)^{n/d}"] & \overline{K}^\times \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_d \arrow[r] & \overline{K}^\times \arrow[r, "(-)^d"] & \overline{K}^\times \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes sont exactes. D'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^1(K,\mu_n) \arrow[d] \\ K^\times \arrow[r] & \mathrm{H}^1(K,\mu_d) \end{tikzcd}$$

D'où l'image a' de $a \in \mathrm{H}^1(K,\mu_n)$ par le morphisme induit par $\mu_n \xrightarrow{(-)^{n/d}} \mu_d$ coïncide avec l'image de $\tilde{a}$ dans $\mathrm{H}^1(K,\mu_d)$ par la théorie de Kummer. Comme $v(\tilde{a})$ est premier à d, par le résultat dans le cas précédent, il existe $b' \in \mathrm{H}^1(K,\mathbb{Z}/d)$ tel que $\mathrm{inv}_K(a' \cup b') = 1/d$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mu_n \times \mathbb{Z}/n \arrow[rr] \arrow[d, "(-)^{n/d}"'] & & \overline{K}^\times \\ \mu_d \times \mathbb{Z}/d \arrow[u, hook] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

Notant $b \in \mathrm{H}^1(K,\mathbb{Z}/n)$ l'image de b' par le morphisme induit par $\mathbb{Z}/d \hookrightarrow \mathbb{Z}/n$, on a $a \cup b = a' \cup b'$, d'où A contient $\mathrm{inv}_K(a \cup b) = \mathrm{inv}_K(a' \cup b') = 1/d$. Le lemme est finalement démontré. □

5B. ***Construction du morphisme $\phi : M \otimes M \to Z$.*** Comme on a vu dans le paragraphe 3B, on peut construire une extension

$$0 \to Z \to F \to M \oplus M \to 0$$

à partir d'un morphisme $\phi : M \otimes M \to Z$. Nous allons maintenant choisir M, Z et ϕ. Les notations suivantes seront fixées jusqu'à la fin du texte.

- A est un groupe abélien fini et k est un corps de nombres contenant $\mu_{\exp(A)}$. On munit A de l'action triviale de Γ_k et l'on fixe un générateur de $\mu_{\exp(A)}$ (ce qui définit un isomorphisme $A = \hat{A}$). L/k est une extension finie galoisienne et $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(L/k)$ (dans la construction originelle de [Borovoi et Kunyavskii 1997], $A = \mathbb{Z}/p^2$ et $\mathfrak{g} = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$, où p est un nombre premier).

- Pour toute place v de k, une place w_v de L divisant v est choisie et $\mathfrak{g}_v \subseteq \mathfrak{g}$ est le groupe de décomposition de $w_v|v$. On fixe également un système de représentants $\mathscr{E}_v$ des classes à gauche de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{g}_v$ et l'on pose $e_v = |\mathscr{E}_v| = [\mathfrak{g} : \mathfrak{g}_v]$. Alors pour toute place w de L divisant v, il existe un unique $s \in \mathscr{E}_v$ tel que $w = s w_v$. De plus, si $\sigma \in \Gamma_k$ est un relevé de s, alors $\Gamma_{L_w} = \sigma \Gamma_{L_{w_v}} \sigma^{-1}$. De plus, pour tout Γ_k-module B sur lequel Γ_L agit trivialement et tout $r \geqslant 1$, on dispose d'un isomorphisme

$$\mathrm{Z}^r(L_{w_v}, B) \to \mathrm{Z}^r(L_w, B),$$

qui à chaque r-cocycle $c : \Gamma^r_{L_{w_v}} \to B$ associe le r-cocycle

$$\Gamma^r_{L_w} \to B, \quad (\tau_1, \ldots, \tau_r) \mapsto c(\sigma^{-1}\tau_1\sigma, \ldots, \sigma^{-1}\tau_r\sigma).$$

Cet isomorphisme-là induit un isomorphisme $\mathrm{H}^r(L_{w_v}, B) \to \mathrm{H}^r(L_w, B)$, qui est compatible avec les flèches de restriction de $\mathrm{H}^r(k_v, B)$. On va noter l'image de chaque classe $\gamma \in \mathrm{H}^r(L_{w_v}, B)$ par ${}^s\gamma \in \mathrm{H}^r(L_w, B)$. Si $\gamma \in \mathrm{H}^r(L, B)$, alors ${}^s(\gamma_{w_v}) = ({}^s\gamma)_w \in \mathrm{H}^r(L_w, B)$.

- $M = \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} A$ et $j : A \otimes A \hookrightarrow M \otimes M$ est l'inclusion canonique, cf. lemme 2.5.
- Z est le conoyau de j et $\phi : M \otimes M \to Z$ est la projection. $\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z$ est l'application biadditive définie par (3-1), c'est-à-dire que

$$\Phi((x, y), (x', y')) = \phi(x \otimes y') \quad \forall x, y, x', y' \in M.$$

Soit F le produit croisé $Z \times_\Phi (M \oplus M)$. On verra que $Z = Z(F) = [F, F]$ (proposition 5.4). On munit F d'une action de Γ_k compatible avec celles sur Z et sur $M \otimes M$.

Proposition 5.4. *Avec les notations ci-dessus, on a les résultats suivants :*

1. *$Z = Z(F) = [F, F]$.*
2. *Soit X un espace homogène de SL_m à stabilisateur géométrique F. Alors $Б(X) = Б_\omega(X) = 0$ et $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} X = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr},1} X$. Si de plus l'action extérieure de Γ_k sur F est induite par l'action coordonnée par coordonnée, alors $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} X = \mathrm{Br}_0 X$.*

Démonstration. On rappelle que $M = \{\mathfrak{g} \to A\}$ (le Γ_k-module des applications $\mathfrak{g} \to A$) et que $M \otimes M = \{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to A \otimes A\}$.

1. Par le lemme 3.5, $Z = [F, F]$ puisque ϕ est surjectif. Montrons que ϕ est non dégénéré.

Notons d'abord que si $a \in A$ est tel que $a \otimes b = 0$ pour tout $b \in A$, alors $a = 0$. En effet, en choisissant un isomorphisme $A \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}/\exp(A))$, on obtient un accouplement parfait $A \otimes A \to \mathbb{Z}/\exp(A)$.

Supposons maintenant que $x : \mathfrak{g} \to A$ est tel que $\phi(x \otimes y) = 0$ pour tout $y : \mathfrak{g} \to A$. Pour tout $a \in A$, soit $y_a : \mathfrak{g} \to A$ défini par $y_a(1) = a$ et $y_a(g) = 0$ pour tout $g \neq 1$. Alors $\phi(x \otimes y_a) = 0$, donc il existe $m_a \in A \otimes A$ tel que $x \otimes y_a = j(m_a)$, c'est-à-dire que

$$x(g) \otimes y_a(h) = m_a \quad \forall g, h \in \mathfrak{g},$$

d'où $x(g) \otimes a = m_a = x(g) \otimes 0 = 0$ pour tous $g \in \mathfrak{g}$ et $a \in A$, donc $x(g) = 0$, ainsi $x = 0$. De même, si $y \in M$ est tel que $\phi(x \otimes y) = 0$ pour tout $x \in M$, on vérifie sans peine que $y = 0$. Ainsi, ϕ est bien non dégénéré et donc $Z = Z(F)$ au vu du lemme 3.6.

2. Calculons $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} \overline{X}$. Au vu de la proposition 4.9, ce groupe est $\mathrm{Hom}((\mathrm{Ker}\,\phi)/H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, où H est le sous-groupe $\langle x \otimes y : x, y \in M, \phi(x \otimes y) = 0 \rangle$ de $M \otimes M$. Tout élément de $\mathrm{Ker}\,\phi$ est de la forme $j(m)$ pour un $m \in A \otimes A$. Écrivons $m = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i$, où I est fini et $a_i, b_i \in A$. On définit $x_i, y_i : \mathfrak{g} \to A$ par

$$x_i(g) = a_i, \quad y_i(g) = b_i$$

pour tous $g \in \mathfrak{g}$ et $i \in I$. Alors $j(a_i \otimes b_i) = x_i \otimes y_i$, d'où $\phi(x_i \otimes y_i) = 0$. On en déduit que

$$j(m) = \sum_{i \in I} j(a_i \otimes b_i) = \sum_i x_i \otimes y_i \in H,$$

d'où $\operatorname{Ker}\phi = H$, donc $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} \overline{X} = 0$. Il s'ensuit que $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr},1} X = \operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X$ et $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr},a} X = (\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X)/(\operatorname{Br}_0 X)$.

Calculons $Б(X)$ et $Б_\omega(X)$. Par le lemme de Shapiro, $Ш^1_\omega(k, \hat{M}) = Ш^1_\omega(L, \hat{A}) = Ш^1_\omega(L, A)$. Or $Ш^1_\omega(L, A) = 0$ par une application du théorème de Chebotarev (cf. [Harari 2017, corollaire 18.4]), donc $Ш^1_\omega(k, \hat{M}) = 0$. Par la proposition 4.1, on a $Б_\omega(X) = 0$ et a fortiori $Б(X) = 0$.

Finalement, si l'action extérieure de Γ_k sur F est induite par l'action coordonnée par coordonnée, alors $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr},a} X = Б_\omega(X) = 0$ par la proposition 4.6, d'où $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X = \operatorname{Br}_{\mathrm{nr},1} X = \operatorname{Br}_0 X$. □

Pour les principaux théorèmes, on considère seulement l'action coordonnée par coordonnée de Γ_k sur F. On suppose ceci pour le reste du texte.

5C. *Principe de Hasse.* Le théorème suivant sera le cœur des preuves de nos principaux résultats. Son deuxième point sera utile pour l'étude de l'approximation faible. Les lecteurs souhaitant s'habituer à l'idée de sa preuve sont conseillés de se restreindre au cas où $A = \mathbb{Z}/n$.

Théorème 5.5. *Soient A un groupe abélien fini, k un corps de nombres contenant $\mu_{\exp(A)}$, L/k une extension finie galoisienne, $M = \operatorname{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} A$, $j : A \otimes A \hookrightarrow M \otimes M$ l'inclusion canonique, Z le conoyau de j et $\phi : M \otimes M \to Z$ la projection. De ϕ on définit une application biadditive $\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z$ par (3-1) et l'on pose $F = Z \times_\Phi (M \oplus M)$, muni de l'action coordonnée par coordonnée de Γ_k. Soit $u \in \mathrm{H}^2(k, M \otimes M)$. Alors, étant donné :*

- *un sous-ensemble fini $S \subseteq \Omega_k$ tel que $u_v = 0$ pour tout $v \notin S$;*
- *pour tout $v \in S$, des éléments $x'_v, y'_v \in \mathrm{H}^1(k_v, M)$ et $\lambda'_v \in \mathrm{H}^2(k_v, A \otimes A)$ tels que $x'_v \cup y'_v = u_v + j_*\lambda'_v$ dans $\mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M)$;*

il existe $x, y \in \mathrm{H}^1(k, M)$ et $\lambda \in \mathrm{H}^2(k, A \otimes A)$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. *$x \cup y = u + j_*\lambda$ dans $\mathrm{H}^2(k, M \otimes M)$.*
2. *$x_v = x'_v$, $y_v = y'_v$ et $\lambda_v = \lambda'_v$ pour tout $v \in S$.*

Démonstration. Gardons les notations au début du paragraphe 5B. Par le lemme 2.3, on dispose d'un isomorphisme $\mathrm{sh}' : \mathrm{H}^2(k, M \otimes M) \to \mathrm{H}^2(L, A \otimes A)^{|\mathfrak{g}|}$; écrivons

$$\mathrm{sh}'(u) = (\gamma_g)_{g \in \mathfrak{g}} \in \mathrm{H}^2(L, A \otimes A)^{|\mathfrak{g}|}.$$

Par le lemme 2.10, on a

$$\forall v \notin S,\ \forall h \in \mathfrak{g}_v,\ \forall s, t \in \mathscr{E}_v,\ ({}^{t^{-1}}\gamma_{sht^{-1}})_{w_v} = 0 \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(L_{w_v}, A \otimes A),$$

ou $(\gamma_{sht^{-1}})_{tw_v} = 0$ dans $\mathrm{H}^2(L_{tw_v}, A \otimes A)$. Pour tous $g \in \mathfrak{g}$ et $w|v$, on peut écrire $w = tw_v$ pour un $t \in \mathscr{E}_v$, puis $gt = sh$ pour un $s \in \mathscr{E}_v$ et un $h \in \mathfrak{g}_v$. On a ainsi

$$\forall v \notin S,\ \forall g \in \mathfrak{g},\ \forall w|v,\ (\gamma_g)_w = 0 \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(L_w, A \otimes A). \tag{5-5}$$

On procède en plusieurs étapes.

Étape 1. *Approchons les λ'_v.* Écrivons $A = \prod_{p\in J} \mathbb{Z}/n_p = \prod_{p\in J} \mu_{n_p}$, et $d_{p,q} = \mathrm{PGCD}(n_p, n_q)$ pour tous $p, q \in J$. Par le théorème de Chebotarev, il existe $|J|^2$ places (deux à deux distinctes) $v_{p,q} \notin S$ de k $(p, q \in J)$ qui sont finies et totalement décomposées dans L (donc $\mathscr{E}_{v_{p,q}} = \mathfrak{g}$). Pour tout $v \in S$, écrivons

$$\lambda'_v = ({\lambda'_v}^{p,q})_{p,q\in J} \in \mathrm{H}^2(k_v, A \otimes A) = \prod_{p,q\in J} (\mathrm{Br}\, k_v)[d_{p,q}].$$

Pour tous $p, q \in J$, par la loi de réciprocité globale, il existe $\lambda^{p,q} \in (\mathrm{Br}\, k)[d_{p,q}]$ tel que :

1. $\lambda^{p,q}_v = {\lambda'_v}^{p,q}$ pour tout $v \in S$.
2. $\mathrm{inv}_{v_{p,q}}(\lambda^{p,q}_{v_{p,q}}) = -\sum_{v\in S} \mathrm{inv}_v({\lambda'_v}^{p,q})$.
3. $\lambda^{p,q}_v = 0$ pour tout $v \notin S \cup \{v_{p,q}\}$.

Posons $\lambda = (\lambda^{p,q})_{p,q\in J} \in \prod_{p,q\in J} (\mathrm{Br}\, k)[d_{p,q}] = \mathrm{H}^2(k, A \otimes A)$. Alors $\lambda_v = \lambda'_v$ pour tout $v \in S$ et $\lambda_v = 0$ pour tout $v \notin S \cup \{v_{p,q} : p, q \in J\}$. En particulier, on a

$$\forall v \in S,\ x'_v \cup y'_v = u_v + j_*\lambda_v \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M). \tag{5-6}$$

Étape 2. *Approchons les x'_v.* Pour tout $v \in S$, on dispose (par le lemme 2.6) d'un isomorphisme

$$\mathrm{sh}_v : \mathrm{H}^1(k_v, M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^1(L_{w_v}, A)^{e_v}.$$

Écrivons $\mathrm{sh}_v(x'_v) = (a'_{v,s})_{s\in\mathscr{E}_v} \in \mathrm{H}^1(L_{w_v}, A)^{e_v}$ et $\mathrm{sh}_v(y'_v) = (b'_{v,s})_{s\in\mathscr{E}_v} \in \mathrm{H}^1(L_{w_v}, A)^{e_v}$.

Pour tous $p, q \in J$, on choisit une uniformisante $\varpi_{p,q} \in k^\times$ de $k_{v_{p,q}}$. Pour tout $p \in J$, le théorème des restes chinois donne un élément $\tilde{a}^p \in L^\times$ tel que :

1. $\tilde{a}^p_w = \varpi_{p,q} \pmod{L_w^{\times n_p}}$ pour toute place w de L divisant une place $v_{p,q}$, où $q \in J$.
2. $\tilde{a}^p_w \in L_w^{\times n_p}$ pour toute place w de L divisant une place $v_{p',q}$, où $p' \in J \setminus \{p\}$ et $q \in J$.

On note $a'^p \in \mathrm{H}^1(L, \mu_{n_p}) = \mathrm{H}^1(L, \mathbb{Z}/n_p)$ l'image de $\tilde{a}^p$ par la théorie de Kummer. Comme $Ш^1_\omega(L, A) = 0$ par le théorème de Chebotarev, le Γ_L-module A vérifie l'approximation faible au sens du lemme 1.1 (cf. [Harari 2017, exercice 17.5 et corollaire 18.4]), donc il existe un $a \in \mathrm{H}^1(L, A)$ tel que :

1. $a_{sw_v} = {}^s a'_{v,s} \in \mathrm{H}^1(L_{sw_v}, A)$ pour tous $v \in S$ et $s \in \mathscr{E}_v$.
2. $a_w = (a'^p_w)_{p\in J} \in \prod_{p\in J} \mathrm{H}^1(L_w, \mathbb{Z}/n_p) = \mathrm{H}^1(L_w, A)$ pour toute place w de L divisant une place $v_{p,q}$, où $p, q \in J$.

Soit $x = \mathrm{sh}^{-1}(a) \in \mathrm{H}^1(k, M)$. Pour tous $v \in S$ et $s \in \mathscr{E}_v$, on a $a_{sw_v} = {}^s a'_{v,s} \in \mathrm{H}^1(L_{sw_v}, A)$, d'où $({}^{s^{-1}}a)_{w_v} = a'_{s,v} \in \mathrm{H}^1(L_{w_v}, A)$. Par le lemme 2.9, on a $x_v = x'_v$ pour tout $v \in S$. Ainsi (5-6) devient

$$\forall v \in S,\ x_v \cup y'_v = u_v + j_*\lambda_v \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M).$$

Au vu des lemmes 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10, on a

$$\forall v \in S,\ \forall h \in \mathfrak{g}_v,\ \forall s, t \in \mathscr{E}_v,\ {}^{h^{-1}s^{-1}}a_{w_v} \cup b'_{v,t} = ({}^{t^{-1}}\gamma_{sht^{-1}})_{w_v} + \mathrm{res}(\lambda)_{w_v} \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(L_{w_v}, A \otimes A),$$

ou ${}^{th^{-1}s^{-1}}a_{tw_v} \cup {}^{t}b'_{v,t} = (\gamma_{sht^{-1}})_{tw_v} + \mathrm{res}(\lambda)_{tw_v}$ dans $\mathrm{H}^2(L_{tw_v}, A \otimes A)$. Pour tous $g \in \mathfrak{g}$ et $t \in \mathscr{E}_v$, on peut écrire $gt = sh$ pour un $s \in \mathscr{E}_v$ et un $h \in \mathfrak{g}_v$. On a ainsi

$$\forall v \in S,\ \forall g \in \mathfrak{g},\ \forall t \in \mathscr{E}_v,\ \ {}^{g^{-1}}a_{tw_v} \cup {}^{t}b'_{v,t} = (\gamma_g)_{tw_v} + \mathrm{res}(\lambda)_{tw_v} \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(L_{tw_v}, A \otimes A). \tag{5-7}$$

Étape 3. *Vérifions l'hypothèse du lemme arithmétique.* On va appliquer la proposition 5.2 :

— au corps de nombres L ;

— à la famille $({}^{g^{-1}}a)_{g\in\mathfrak{g}} \in \mathrm{H}^1(L, A)$;

— à la famille $(\gamma_g + \mathrm{res}(\lambda))_{g\in\mathfrak{g}} \in \mathrm{H}^2(L, A \otimes A)^{|\mathfrak{g}|}$;

— et à l'ensemble $\{w \in \Omega_L : \exists v \in S \cup \{v_{p,q} : p, q \in J\},\ w|v\}$.

Soit w une place de L et montrons qu'il existe $c_w \in \mathrm{H}^1(L_w, A)$ tel que

$$\forall g \in \mathfrak{g},\ \ {}^{g^{-1}}a_w \cup c_w = (\gamma_g)_w + \mathrm{res}(\lambda)_w \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(L_w, A \otimes A).$$

Notons v la place de k au-dessous de w. On distingue trois cas.

— Si $v \in S$: au vu de (5-7), il suffit de prendre $c_w = {}^{t}b'_{v,t}$, où $t \in \mathscr{E}_v$ est tel que $w = tw_v$.

— Si $v = v_{p',q'}$, où $p', q' \in J$: rappelons que v est totalement décomposée dans L et que $\varpi := \varpi_{p',q'} \in k^\times$ est une uniformisante de k_v. D'une part, $\tilde{a}_w^{p'} = \varpi \pmod{L_w^{\times n_{p'}}}$, donc l'image $a_w^{p'} \in \mathrm{H}^1(L_w, \mu_{n_{p'}})$ de $\tilde{a}_w^{p'}$ (par la théorie de Kummer) est $\mathfrak{g}$-équivariante. Or $\tilde{a}_w^{p} \in L_w^{\times n_p}$ pour tout $p \in J \setminus \{p'\}$, donc l'image de $\tilde{a}_w^{p}$ dans $\mathrm{H}^1(L_w, \mu_{n_p})$ (par la théorie de Kummer) est $a_w^p = 0$. En particulier, $a_w = (a_w^p)_{p\in J} \in \mathrm{H}^1(L_w, A)$ est $\mathfrak{g}$-équivariant. D'autre part, $(\gamma_g)_w = 0$ pour tout $g \in \mathfrak{g}$ puisque $u_v = 0$. Ainsi, il faut chercher $c_w = (c_w^q)_{q\in J} \in \prod_{q\in J} \mathrm{H}^1(L_w, \mu_{n_q})$ tel que

$$a_w \cup c_w = \mathrm{res}(\lambda)_w \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(L_w, A \otimes A),$$

c'est-à-dire

$$\forall p, q \in J,\ \ a_w^p \cup c_w^q = \mathrm{res}(\lambda^{p,q})_w \quad \text{dans } (\mathrm{Br}\, L_w)[d_{p,q}]. \tag{5-8}$$

On choisit $c_w^q = 0$ pour tout $q \in J \setminus \{q'\}$. Pour le $c_w^{q'}$, on note $\alpha \in \mathrm{H}^1(L_w, \mu_{n_{q'}}) = \mathrm{H}^1(L_w, \mathbb{Z}/n_{q'})$ l'image de $\tilde{a}_w^{p'}$ par la théorie de Kummer, et l'on choisit $r \in (\mathrm{Br}\, L_w)[n_{q'}]$ tel que $(n_{q'}/d_{p',q'})r = \mathrm{res}(\lambda^{p',q'})_w$. Comme $w(\tilde{a}^{p'}) = v(\tilde{a}^{p'}) = 1$, le lemme 5.3 assure qu'il existe $c_w^{q'} \in \mathrm{H}^1(L_w, \mathbb{Z}/n_{q'}) = \mathrm{H}^1(L_w, \mu_{n_{q'}})$ tel que $\alpha \cup c_w^{q'} = r$, d'où $(n_{q'}/d_{p',q'})\alpha \cup c_w^{q'} = \mathrm{res}(\lambda^{p',q'})_w$. Au vu de (5-3), on a $(\iota_{n_{q'}}^{n_{p'}})_* a_w^{p'} = (n'_q/d_{p',q'})\alpha \in \mathrm{H}^1(L_w, \mathbb{Z}/n_{q'})$, d'où $a_w^{p'} \cup c_w^{q'} = \mathrm{res}(\lambda^{p',q'})_w$ en vertu de (5-2).

On prend finalement $c_w = (c_w^q)_{q\in J}$. On a déjà vu que cet élément vérifie (5-8) pour $(p, q) = (p', q')$. Or, pour tout $(p, q) \in (J \times J) \setminus \{(p', q')\}$, on a soit $a_w^p = 0$ (si $p \neq p'$) ou $c_w^q = 0$ (si $q \neq q'$), et de plus $\lambda_v^{p,q} = 0$ par notre choix de $\lambda^{p,q}$, d'où $\mathrm{res}(\lambda^{p,q})_w = 0 = a_w^p \cup c_w^q$, ce qui établit (5-8) pour tous $p, q \in J$.

— Si $v \notin S \cup \{v_{p,q} : p, q \in J\}$. Dans ce cas, on a $u_v = 0$ et $\lambda_v = 0$, d'où $(\gamma_g)_w = \mathrm{res}(\lambda)_w = 0$ pour tous $g \in \mathfrak{g}$, donc il suffit de prendre $c_w = 0$.

L'hypothèse de la proposition 5.2 est alors vérifiée.

Étape 4. *Utilisons le lemme arithmétique pour approcher les y'_v.* La proposition 5.2 nous permet de fabriquer un élément $b \in \mathrm{H}^1(L, A)$ satisfaisant les conditions suivantes.

1. ${}^{g^{-1}}a \cup b = \gamma_g + \mathrm{res}(\lambda)$ dans $\mathrm{H}^2(L, A \otimes A)$ pour tout $g \in \mathfrak{g}$.
2. $b_{tw_v} = {}^t b'_{v,t}$ dans $\mathrm{H}^1(L_{tw_v}, A)$ pour tous $v \in S$ et $t \in \mathscr{E}_v$.

On note $y = \mathrm{sh}^{-1}(b) \in \mathrm{H}^1(k, M)$. Regardons les deux conditions ci-dessus.

1. Pour la première condition, par les lemmes 2.4 et 2.5, on a $x \cup y = u + j_*\lambda$ dans $\mathrm{H}^2(k, M \otimes M)$.
2. Soit $v \in S$. Pour tout $t \in \mathscr{E}_v$, la deuxième condition implique que ${}^{t^{-1}}b_{w_v} = b'_{t,v}$ dans $\mathrm{H}^1(L_{w_v}, A)$. En vertu du lemme 2.9, on a $y_v = y'_v$. Rappelons qu'on a déjà $x_v = x'_v$ et $\lambda_v = \lambda'_v$ pour tout $v \in S$.

Le théorème est finalement démontré. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème A.

Théorème 5.6. *Soient A un groupe abélien fini, k un corps de nombres contenant $\mu_{\exp(A)}$, L/k une extension finie galoisienne, $M = \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} A$, $j : A \otimes A \hookrightarrow M \otimes M$ l'inclusion canonique, Z le conoyau de j et $\phi : M \otimes M \to Z$ la projection. De ϕ on définit une application biadditive $\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z$ par (3-1) et l'on pose $F = Z \times_\Phi (M \oplus M)$. On munit F de l'action coordonnée par coordonnée de Γ_k. Si X est un espace homogène de SL_m de lien de Springer* lien(F) *tel que $X(k_v) \neq \varnothing$ pour toute place v de k, alors $X(k) \neq \varnothing$.*

Démonstration. Notons $\Delta : \mathrm{H}^2(k, M \oplus M) \to \mathrm{H}^2(k, Z)$ l'application connectante induite par l'extension centrale $0 \to Z \to F \to M \oplus M \to 0$. Rappelons que $Z = Z(F) = [F, F]$ par la proposition 5.4. Soit $\eta_0 \in \mathrm{H}^2(k, F)$ la classe neutre privilégiée. Alors il existe une unique classe $\beta \in \mathrm{H}^2(k, Z)$ telle que la classe de Springer de X vaut $\eta_X = \beta \cdot \eta_0$ (cf. paragraphe 3A). Soit v une place de Ω_k. Si $X(k_v) \neq \varnothing$, par la proposition 3.3 et le lemme 3.8, il existera $(x'_v, y'_v) \in \mathrm{H}^1(k_v, M \oplus M)$ tel que $\beta_v = \Delta(x'_v, y'_v) = \phi_*(x'_v \cup y'_v)$ dans $\mathrm{H}^2(k_v, Z)$, donc l'image de β_v dans $\mathrm{H}^3(k_v, A \otimes A)$ sera nulle. Ainsi, lorsque $X(k_v) \neq \varnothing$ pour tout v, l'image de β dans $\mathrm{H}^3(k, A \otimes A)$ sera nulle partout localement. Or $\text{Ш}^3(k, A \otimes A) = 0$ (c'est une conséquence d'une version simple de la dualité de Poitou–Tate, cf. [Harari 2017, théorème 17.13]), donc β s'enverra sur $0 \in \mathrm{H}^3(k, A \otimes A)$, d'où il existera $u \in \mathrm{H}^2(k, M \otimes M)$ tel que $\beta = \phi_*(u)$.

Soit $S \subseteq \Omega_k$ l'ensemble des places v telles que $u_v \neq 0$. Pour tout $v \in S$, comme $\phi_*(x'_v \cup y'_v) = \beta_v = \phi_*(u_v)$ dans $\mathrm{H}^2(k_v, Z)$, il existe $\lambda'_v \in \mathrm{H}^2(k_v, A \otimes A)$ tel que $x'_v \cup y'_v = u_v + j_*\lambda'_v$ dans $\mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M)$. Par le théorème 5.5, on peut trouver $x, y \in \mathrm{H}^1(k, M)$ et $\lambda \in \mathrm{H}^2(k, A \otimes A)$ tels que $x \cup y = u + j_*\lambda$ dans $\mathrm{H}^2(k, M \otimes M)$. En particulier, $\beta = \phi_*(u) = \phi_*(x \cup y) = \Delta(x, y)$ par le lemme 3.8. Au vu de la proposition 3.3, on peut conclure que $X(k) \neq \varnothing$. □

5D. *Approximation faible.* Gardons les notations au début du paragraphe 5B. On a une suite exacte

$$0 \to A \otimes A \xrightarrow{j} M \otimes M \xrightarrow{\phi} Z \to 0 \tag{5-9}$$

de Γ_k-modules. En dualisant, on obtient une suite exacte

$$0 \to \hat{Z} \xrightarrow{\hat{\phi}} \widehat{M \otimes M} \xrightarrow{\hat{j}} \widehat{A \otimes A} \to 0. \tag{5-10}$$

Notons que Γ_k agit trivialement sur $A \otimes A$ et sur $\widehat{A \otimes A}$.

Lemme 5.7. *Le sous-groupe* $Ш^1_\omega(k, \hat{Z}) \subseteq \mathrm{H}^1(k, \hat{Z})$ *est inclus dans l'image du morphisme connectant* $\hat{\delta} : \widehat{A \otimes A} \to \mathrm{H}^1(k, \hat{Z})$ *induit par* (5-10).

Démonstration. Comme (5-10) est déployé par L, on peut identifier $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \hat{Z})$ à un sous-groupe de $\mathrm{H}^1(k, \hat{Z})$ (par la suite exacte d'inflation-restriction). Une application du théorème de Chebotarev donne $Ш^1_\omega(L, \hat{Z}) = 0$ (voir [Harari 2017, corollaire 18.4]), donc on a $Ш^1_\omega(k, \hat{Z}) = Ш^1_\omega(\mathfrak{g}, \hat{Z}) \subseteq \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \hat{Z})$. Maintenant, $M \otimes M$ est un $\mathfrak{g}$-module induit par le lemme 2.3, donc il en va de même pour $\widehat{M \otimes M}$. Par le lemme de Shapiro, $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \widehat{M \otimes M}) = 0$ et donc le morphisme connectant $\widehat{A \otimes A} \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}, \hat{Z})$ est surjectif. D'où le lemme. □

On démontre maintenant le théorème B.

Théorème 5.8. *Soient A un groupe abélien fini, k un corps de nombres contenant $\mu_{\exp(A)}$, L/k une extension finie galoisienne, $M = \mathrm{Ind}_{\Gamma_k}^{\Gamma_L} A$, $j : A \otimes A \hookrightarrow M \otimes M$ l'inclusion canonique, Z le conoyau de j et $\phi : M \otimes M \to Z$ la projection. De ϕ on définit une application biadditive $\Phi : (M \oplus M) \times (M \oplus M) \to Z$ par* (3-1) *et l'on pose $F = Z \times_\Phi (M \oplus M)$. On munit F de l'action coordonnée par coordonnée de Γ_k. Si X est un espace homogène de SL_m de lien de Springer* $\mathrm{lien}(F)$ *tel que $X(k) \neq \varnothing$, alors X vérifie l'approximation faible.*

Démonstration. Par la proposition 3.3, $X \simeq {}_{\mathfrak{a}}F \setminus \mathrm{SL}_m$ pour un certain 1-cocycle $\mathfrak{a} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) : \Gamma_k \to M \oplus M$. Par le lemme 1.1, on s'est ramené à la question d'approximation faible pour ${}_{\mathfrak{a}}F$, i.e., il faut démontrer que pour tout sous-ensemble fini $S \subseteq \Omega_k$, la restriction

$$\mathrm{H}^1(k, {}_{\mathfrak{a}}F) \to \prod_{v \in S} \mathrm{H}^1(k_v, {}_{\mathfrak{a}}F)$$

est surjective. Soit alors $f'_v = (z'_v, a'_v) : \Gamma_{k_v} \to {}_{\mathfrak{a}}F$ une famille de 1-cocycles, $v \in S$, où $a'_v = (x'_v, y'_v)$. Pour tout $v \in S$, par le lemme 3.8, a'_v est un cocycle et de plus

$$\mathrm{d}z'_v + \phi_*(\mathfrak{x}_v \cup y'_v + x'_v \cup \mathfrak{y}_v + x'_v \cup y'_v + \mathrm{d}(x'_v \otimes \mathfrak{y}_v)) = 0 \quad \text{dans } \mathrm{Z}^2(k_v, Z).$$

Écrivons $z'_v = \phi_* \varepsilon'_v$ pour une 1-cochaîne $\varepsilon'_v : \Gamma_{k_v} \to M \otimes M$. Il existe alors un 2-cocycle $\lambda'_v : \Gamma_{k_v} \times \Gamma_{k_v} \to A \otimes A$ tel que

$$\mathrm{d}\varepsilon'_v + \mathfrak{x}_v \cup y'_v + x'_v \cup \mathfrak{y}_v + x'_v \cup y'_v + \mathrm{d}(x'_v \otimes \mathfrak{y}_v) = j_* \lambda'_v \quad \text{dans } \mathrm{Z}^2(k_v, M \otimes M). \tag{5-11}$$

Considérons l'élément $u = [\mathfrak{x} \cup \mathfrak{y}] \in \mathrm{H}^2(k, M \otimes M)$. Quitte à agrandir S, on peut supposer que $u_v = 0$ pour tout $v \notin S$. De (5-11), on a

$$\forall v \in S, \ [(x'_v + \mathfrak{x}_v) \cup (y'_v + \mathfrak{y}_v)] = [\mathfrak{x}_v \cup \mathfrak{y}_v] + j_*[\lambda'_v] \quad \text{dans } \mathrm{H}^2(k_v, M \otimes M).$$

Par le théorème 5.5, il existe des 1-cocycles $\tilde{x}, \tilde{y} : \Gamma_k \to M$ et un 2-cocycle $\lambda : \Gamma_k \times \Gamma_k \to A \otimes A$ tels que les conditions suivantes soient remplies :

1. $[\tilde{x} \cup \tilde{y}] = [\mathfrak{x} \cup \mathfrak{y}] + j_*[\lambda]$ dans $\mathrm{H}^2(k, M \otimes M)$.
2. Pour tout $v \in S$, $[\tilde{x}_v] = [x'_v + \mathfrak{x}_v]$, $[\tilde{y}_v] = [y'_v + \mathfrak{y}_v]$ et $[\lambda_v] = [\lambda'_v]$.

Soient $x=\tilde{x}-\mathfrak{x}$, $y=\tilde{y}-\mathfrak{y}$ et $a=(x,y)$. Alors $[x_v]=[x'_v]$ et $[y_v]=[y'_v]$ pour tout $v\in S$. De $[\tilde{x}\cup\tilde{y}]=[\mathfrak{x}\cup\mathfrak{y}]+j_*[\lambda]$, on voit qu'il existe une 1-cochaîne $\varepsilon:\Gamma_k\to M\otimes M$ telle que

$$\mathrm{d}\varepsilon+\mathfrak{x}\cup y+x\cup\mathfrak{y}+x\cup y+\mathrm{d}(x\otimes\mathfrak{y})=j_*\lambda. \tag{5-12}$$

Posons $z:=\phi_*\varepsilon$, alors (5-12) implique que $\mathrm{d}z+\phi_*(\mathfrak{x}\cup y+x\cup\mathfrak{y}+x\cup y+\mathrm{d}(x\otimes\mathfrak{y}))=0$ et donc $(z,a):\Gamma_k\to F$ est un cocycle par le lemme 3.8.

Soit $v\in S$. Puisque $[x'_v]=[x_v]$ et $[y'_v]=[y_v]$ dans $\mathrm{H}^1(k,M)$, on peut écrire $x'_v=x_v+\mathrm{d}\xi_v$ et $y'_v=y_v+\mathrm{d}\eta_v$, où $\xi_v,\eta_v\in M$. On considère le 1-cocycle

$$c_v:=z'_v-z_v+\phi_*(-(x_v+\mathfrak{x}_v)\cup\eta_v+\xi_v\cup(y'_v+\mathfrak{y}_v)+\mathrm{d}\xi_v\otimes\eta_v):\Gamma_{k_v}\to Z$$

comme dans l'énoncé du lemme 3.9. Au vu de (5-11) et (5-12), le troisième point de ce lemme-là donne $\delta([c_v])=[\lambda'_v-\lambda_v]=0$, où $\delta:\mathrm{H}^1(k_v,Z)\to\mathrm{H}^2(k_v,A\otimes A)$ désigne le morphisme connectant induit par (5-9). Or, en vertu du lemme 5.7 tout élément de $Ш^1_S(k,\hat{Z})$ appartient à l'image du morphisme connectant $\hat{\delta}:\widehat{A\otimes A}\to\mathrm{H}^1(k,\hat{Z})$ induit par (5-10). Puisque les cup-produits sont compatibles avec les morphismes connectants, on voit que la famille $([c_v])_{v\in S}$ est orthogonale à $Ш^1_S(k,\hat{Z})$ par rapport à l'accouplement

$$\prod_{v\in S}\mathrm{H}^1(k_v,Z)\times\mathrm{H}^1(k,\hat{Z})\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

obtenu en rassemblant les dualités locales de Tate. Par [Harari 2017, exercice 17.5], il existe un 1-cocycle $\tilde{z}:\Gamma_k\to Z$ tel que $[\tilde{z}_v]=[c_v]$ dans $\mathrm{H}^1(k_v,Z)$ pour tout $v\in S$. On pose finalement

$$f:=(\tilde{z},0)(z,a)=(z+\tilde{z},a):\Gamma_k\to{}_{\mathfrak{a}}F,$$

qui est un 1-cocycle puisque (z,a) et $(\tilde{z},0)$ le sont (notons que Z est central dans ${}_{\mathfrak{a}}F$). Soit $v\in S$, il reste à montrer que $[f_v]=[f'_v]$ dans $\mathrm{H}^1(k_v,{}_{\mathfrak{a}}F)$. En effet, la 1-cochaîne

$$z'_v-(z_v+\tilde{z}_v)+\phi_*(-(x_v+\mathfrak{x}_v)\cup\eta_v+\xi_v\cup(y'_v+\mathfrak{y}_v)+\mathrm{d}\xi_v\otimes\eta_v)=c_v-\tilde{z}_v:\Gamma_{k_v}\to Z$$

est un cobord, donc f_v est cohomologue à f'_v par le lemme 3.9. On a donc trouvé une classe $[f]\in\mathrm{H}^1(k,{}_{\mathfrak{a}}F)$ qui se restreint à $([f'_v])_{v\in S}\in\prod_{v\in S}\mathrm{H}^1(k_v,{}_{\mathfrak{a}}F)$. Ainsi ${}_{\mathfrak{a}}F$ vérifie bien l'approximation faible, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remerciements

Ce travail est financé par un « Contrat doctoral spécifique normalien » de l'École normale supérieure de Paris. L'auteur est reconnaissant à David Harari pour ses commentaires précieux ainsi que pour son soutien. Il remercie Alexeï Skorobogatov, Jean-Louis Colliot-Thélène et Mikhaïl Borovoi pour les discussions pertinentes, ainsi que les rapporteurs pour avoir lu attentivement le texte et pour leurs remarques.

Bibliographie

[Bogomolov 1987] F. A. Bogomolov, "The Brauer group of quotient spaces by linear group actions", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **51**:3 (1987), 485–516. En russe ; traduit en anglais à *Math. USSR Izv.* **30**:3 (1988), 455–485. Zbl

[Borovoi 1993] M. V. Borovoi, "Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology", *Duke Math. J.* **72**:1 (1993), 217–239. MR Zbl

[Borovoi 1996] M. Borovoi, "The Brauer–Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer", *J. Reine Angew. Math.* **473** (1996), 181–194. MR Zbl

[Borovoi et Kunyavskii 1997] M. Borovoi et B. Kunyavskii, "On the Hasse principle for homogeneous spaces with finite stabilizers", *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) **6**:3 (1997), 481–497. Correction à la référence suivante. MR Zbl

[Borovoi et Kunyavskii 2001] M. Borovoi et B. Kunyavskii, "Erratum: On the Hasse principle for homogeneous spaces with finite stabilizers", *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) **10**:4 (2001), 779. MR

[Colliot-Thélène et Skorobogatov 2021] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The Brauer–Grothendieck group*, Ergebnisse der Math. (3) **71**, Springer, 2021. MR Zbl

[Demarche 2010] C. Demarche, "Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis", *Math. Ann.* **346**:4 (2010), 949–968. MR Zbl

[Demarche et Lucchini Arteche 2019] C. Demarche et G. Lucchini Arteche, "Le principe de Hasse pour les espaces homogènes: réduction au cas des stabilisateurs finis", *Compos. Math.* **155**:8 (2019), 1568–1593. MR Zbl

[Flicker et al. 1998] Y. Z. Flicker, C. Scheiderer et R. Sujatha, "Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles", *J. Amer. Math. Soc.* **11**:3 (1998), 731–750. MR Zbl

[Harari 2007] D. Harari, "Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini", *Bull. Soc. Math. France* **135**:4 (2007), 549–564. MR Zbl

[Harari 2017] D. Harari, *Cohomologie galoisienne et théorie du corps de classes*, EDP Sciences, Les Ulis, 2017. MR Zbl

[Harari et Skorobogatov 2002] D. Harari et A. N. Skorobogatov, "Non-abelian cohomology and rational points", *Compositio Math.* **130**:3 (2002), 241–273. MR Zbl

[Harpaz et Wittenberg 2020] Y. Harpaz et O. Wittenberg, "Zéro-cycles sur les espaces homogènes et problème de Galois inverse", *J. Amer. Math. Soc.* **33**:3 (2020), 775–805. MR Zbl

[Manin 1971] Y. I. Manin, "Le groupe de Brauer–Grothendieck en géométrie diophantienne", pp. 401–411 dans *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), tome 1, édité par M. Berger et al., Gauthier-Villars, Paris, 1971. MR Zbl

[Moravec 2012] P. Moravec, "Unramified Brauer groups of finite and infinite groups", *Amer. J. Math.* **134**:6 (2012), 1679–1704. MR Zbl

[Naidu 2007] D. Naidu, "Categorical Morita equivalence for group-theoretical categories", *Comm. Algebra* **35**:11 (2007), 3544–3565. MR Zbl

[Serre 1962] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago **8**, Hermann, Paris, 1962. MR Zbl

[Serre 1970] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Collection SUP: Le Mathématicien **2**, Presses Universitaires de France, Paris, 1970. MR Zbl

[Serre 1994] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, 5e éd., Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer, 1994. MR Zbl

[Skorobogatov 2001] A. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics **144**, Cambridge University Press, 2001. MR Zbl

Communicated by Bjorn Poonen
Received 2022-07-15 Revised 2022-12-22 Accepted 2023-02-13

manh-linh.nguyen@universite-paris-saclay.fr
Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay, Orsay, France

mathematical sciences publishers msp

Algebra & Number Theory

msp.org/ant

See inside back cover or msp.org/ant for submission instructions.

The subscription price for 2024 is US $525/year for the electronic version, and $770/year (+$65, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Algebra & Number Theory (ISSN 1944-7833 electronic, 1937-0652 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online.

ANT peer review and production are managed by EditFLOW® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Algebra & Number Theory

Volume 18 No. 2 2024