Математика

Издание на ЦК на ДКМС

ОСМИ БРОЙ

1982

ISSN 0204—6881

МАТЕ МАТИ КА

8

БРОЙ
1982
ГОДИНА XXI

ИЗДАНИЕ НА ЦК НА ДКМС ЗА СРЕДНОШКОЛЦИ

начални положения A_0 и B_0 започват да се движат съответно точките A и B по такъв начин, че отношението от изминатите пътища във всеки момент от движението е константа. Движението завършва, когато точката A попадне в предварително избрана точка A_1. Да се намери множеството, което описва точката M, деляща отсечката AB в отношение ρ.

Отговор. Търсеното множество е отсечката, съединяваща точките M_0 и M_1, където $(A_0B_0M)=\rho$, $(A_1B_1M)=\rho$, а B_1 е крайното положение на точката B.

С помощта на задача 6 лесно се решава

Задача 7. Ъгълът AOB на триъгълника AOB е остър. От произволна точка M върху страната AB са спуснати перпендикуляри MP и MQ съответно към AO и BO. Да се намери множеството на ортоцентровете H на триъгълника OPQ.

Упътване. Нека точката M се движи равномерно по AB от A до B (черт. 9). Тогава P се движи равномерно по AO от A до F, където F е петата на перпендикуляра от B към AO, а в същото време Q се движи равномерно по OB от E до B, където E е петата на перпендикуляра от A към OB. Съгласно задача 3 средата L на отсечката PQ се движи равномерно по отсечката RS от R до S, където R е средата на AE, а S е средата на BF. Но $MPHQ$ е успоредник и следователно L е среда и на отсечката MN. Тогава $(MLH)=-2$ и съгласно задача 6 точката H описва отсечка. Тъй като в началния момент H се намира в E, а в крайния — в F, търсеното множество е отсечката EF.

Н. ХАДЖИИВАНОВ, Н. НЕНОВ

ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ И ПРАВИЛНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

В тази статия се разглеждат въпроси, които са свързани с ученическото творчество от брой 2, 6, 10 от 1981 г. и бр. 5 от 1982 г. на сп. „Математика".

Нека M е точка от описаната около правилния n-ъгълник $A_1A_2\dots A_n$ окръжност. За произволно естествено число k да означим с $S_{n,k}(M)$ сумата $S_{n,k}(M)=A_1M^k+A_2M^k+\dots+A_nM^k$.

Известно е, че функцията $S_{n,2}(M)$ не зависи от положението на точката M. В статията „Едно приложение на теоремата на Рол в геометрията", брой 1, 1981 г. на сп. „Обучението по математика" Й. Табов разглежда въпроса, кога функцията $S_{3,k}(M)$ не зависи от точката M и изказва интересното предположение, че в общия случай единствените стойности на k, за които $S_{n,k}(M)$ не зависи от M, са $k=2, 4, \dots, 2(n-1)$.

Тук ще си поставим за цел да пресметнем функцията $S_{n,k}(M)$. Получените формули дават възможност за елементарно доказателство на предположението на Табов, а също така могат да се използват и за получаване на други интересни свойства на правилните многоъгълници. Макар и елементарни, пресмятанията предполагат знания по тригонометрия и някои свойства на комплексните числа.

НЕОБХОДИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ТЪЖДЕСТВА

Най-напред ще припомним без доказателство следните две известни формули:

$$\text{(1)}\qquad \sum_{k=0}^{n}\cos(\varphi+k\psi)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\psi}{2}\cdot\cos\left(\varphi+\dfrac{n\psi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\psi}{2}} & \text{при } \psi\neq 2l\pi;\\ (n+1)\cos\varphi & \text{при } \psi=2l\pi,\end{cases}$$

$$\text{(2)}\qquad \sum_{k=0}^{n}\sin(\varphi+k\psi)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\psi}{2}\cdot\sin\left(\varphi+\dfrac{n\psi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\psi}{2}} & \text{при } \psi\neq 2l\pi;\\ (n+1)\sin\varphi & \text{при } \psi=2l\pi,\end{cases}$$

където l е цяло число. Ще използуваме и равенството $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=$ $=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$, което се нарича формула на Моавър. (Тук $i=\sqrt{-1}$.)

Лема 1. За произволно естествено число k са в сила равенствата

$$\text{(3)}\qquad \sin^{2k}\varphi=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\binom{2k}{k}+2(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\binom{2k}{l}\cos 2(k-l)\varphi,$$

$$\text{(4)}\qquad \sin^{2k+1}\varphi=2(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{2k+1}{l}\sin(2k+1-2l)\varphi,$$

където с $\binom{n}{m}$ е означен съответният биномен коефициент.

Доказателство. Да разгледаме комплексното число $z=\cos\varphi+$ $+i\sin\varphi$. Като използуваме, че $\frac{1}{z}=\cos\varphi-i\sin\varphi$, получаваме

$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\text{ и }\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

От първото равенство и биномната формула на Нютон следва, че

$$\sin^{2k}\varphi=\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^{2k}=(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{l=0}^{2k}(-1)^l\binom{2k}{l}z^{2k-2l}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\binom{2k}{k}+(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{2k}{l}\left(z^{2k-2l}+\frac{1}{z^{2k-2l}}\right).$$

От формулата на Моавър както по-горе намираме $z^{2k-2l}+\frac{1}{z^{2k-2l}}=2\cos 2(k-$ $-l)\varphi$ и като заместим, получаваме (3). Равенство (4) се доказва по същия начин, като се използува, че $z^{2k-2l+1}-\frac{1}{z^{2k-2l+1}}=2i\sin(2k+1-2l)\varphi$.

ПРЕСМЯТАНЕ НА ФУНКЦИЯТА $S_{n,k}(M)$

Нека $A_1A_2\ldots A_n$ е правилен n-ъгълник и R е радиусът на описаната около него окръжност. Ще считаме, че върховете на n-ъгълника са номерирани в „положителна" посока, т. е. обратно на часовниковата стрелка. В същата посока се измерват и написаните по-долу дъги. Ако M

е точка от описаната около $A_1A_2 \ldots A_n$ окръжност, да означим с α централния ъгъл, опиращ на дъгата $\widehat{MA_1}$. Ще изразим функцията $S_{n,k}(M)$ чрез ъгъла α, като разгледаме отделно случаите на четни и нечетни стойности на k.

Теорема 1. Нека k е произволно естествено число. Тогава

а) ако $1 \leqq k \leqq n-1$, то $S_{n,2k}(M) = n\binom{2k}{k} R^{2k}$;

б) ако $k \geqq n$, то $S_{n,2k}(M) = n\binom{2k}{k} R^{2k} + 2nR^{2k} \sum_{p=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]} (-1)^{pn} \binom{2k}{k-pn} \cos pn\alpha$,

където $\left[\frac{k}{n}\right]$ е цялата част на числото $\frac{k}{n}$.

Доказателство. Тъй като $\widehat{MA_1} = \alpha$, ясно е, че $\widehat{MA_l}$ е сравнима с $\alpha + \frac{2(l-1)\pi}{n}$ по модул 2π. Тогава $|A_l M| = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(l-1)\pi}{n}\right)$ и следователно

$$S_{n,2k}(M) = (2R)^{2k} \sum_{l=1}^{n} \sin^{2k}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(l-1)\pi}{n}\right).$$

Като използуваме (3) и сменим реда на сумирането, получаваме следното равенство:

$$(5)\quad S_{n,2k}(M) = n\binom{2k}{k} R^{2k} + 2R^{2k} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l} \binom{2k}{l} \sum_{s=0}^{n-1} \cos\left[(k-l)\alpha + s \cdot \frac{2(k-l)\pi}{n}\right].$$

Да предположим най-напред, че $1 \leqq k \leqq n-1$. Тогава числото $\frac{2(k-l)}{n}\pi$ не е целочислено кратно на 2π и от формула (1) следва, че за всяко цяло число l, $0 \leqq l \leqq k-1$, имаме

$$\sum_{s=0}^{n-1} \cos\left[(k-l)\alpha + s\,\frac{2(k-l)}{n}\pi\right] = 0.$$

Като заместим в равенство (5), получаваме първата част на теоремата.

Нека сега $k \geqq n$. Единствените стойности на l, за които числото $\frac{(k-l)}{n} \cdot 2\pi$ е целочислено кратно на 2π, са $l = k-n, k-2n, \ldots, k-\left[\frac{k}{n}\right] n$, защото $0 \leqq l \leqq k-1$. Тогава от (1) следва, че

$$\sum_{s=0}^{k-1} \cos\left[(k-l)\alpha + s \cdot \frac{2(k-l)\pi}{n}\right] = \begin{cases} 0 \text{ при } l \neq k-pn; \\ n\cos(k-l)\alpha \text{ при } l = k-pn, \end{cases}$$

където $1 \leq p \leq \left[\frac{k}{n}\right]$. Като вземем пред вид (5) и горното равенство, получаваме втората част на теоремата.

Теорема 2. За произволно нечетно число $2k+1$ е в сила зависимостта

$$S_{n,2k+1}(M) = 2R^{2k+1} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{2k+1}{k-p} \frac{\cos(2p+1)\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{(2p+1)\pi}{2n}}.$$

Доказателство. Разсъждавайки както в доказателството на теорема 1, с помощта на (4) получаваме, че

$$S_{n,\,2k+1}(M)=2R^{2k+1}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{2k+1}{l}\sum_{s=0}^{n-1}\sin\left[\frac{(2k+1-2l)\,\alpha}{2}+s\,.\,\frac{(2k+1-2l)\,\pi}{2n}\right],$$

а като положим $k-l=p$, намираме

$$(6)\quad S_{n,\,2k+1}(M)=2R^{2k+1}\sum_{p=0}^{k}(-1)^{p}\binom{2k+1}{k-p}\sum_{s=0}^{n-1}\sin\left[\frac{(2p+1)\,\alpha}{2}+s\,.\,\frac{(2p+1)\,\pi}{n}\right].$$

Тъй като $\frac{(2p+1)\,\pi}{n}$ не е целочислено кратно на 2π, от (2) следва, че

$$(7)\quad \sum_{s=0}^{n-1}\sin\left[\frac{2\,(p+1)\,\alpha}{2}+s\;\frac{(2p+1)\,\pi}{n}\right]=\frac{\sin\frac{(2p+1)\,\pi}{2}\,.\,\sin\left[\frac{(2p+1)\,\alpha}{2}+\frac{(n-1)\,(2p+1)\,\pi}{2n}\right]}{\sin\frac{(2p+1)\,\pi}{2n}}.$$

Като вземем пред вид равенствата

$$\sin\frac{(2p+1)\,\pi}{2}=-(1)^{p}\ \text{и}\ \sin\left[\frac{(2p+1)\,\alpha}{2}+\frac{(n-1)\,(2p+1)\,\pi}{2n}\right]=(-1)^{p}\cos(2p+1)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2n}\right),$$

с помощта на (6) и (7) получаваме формулата от условието на теоремата.

Да означим със $\sum_{n,\,k}$ сумата от k-тите степени на всички страни и диагонали на правилния n-ъгълник $A_1A_2\,\ldots\,A_n$. С помощта на теорема 1 и 2 ще пресметнем $\sum_{n,\,k}$.

Следствие. а) Ако $1\leqq k\leqq n-1$, то $\sum_{n,\,2k}=\frac{n^2}{2}\binom{2k}{k}R^{2k}$. Ако $k\geqq n$, то

$$\sum_{n,\,2k}=\frac{n^2}{2}\binom{2k}{k}R^{2k}+n^2R^{2k}\sum_{p=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]}(-1)^{pn}\binom{2k}{k-pn}.$$

б) За произволно нечетно число $2k+1$ е в сила равенството

$$\sum_{n,\,2k+1}=nR^{2k+1}\sum_{p=0}^{k}(-1)^{p}\binom{2k+1}{k-p}\operatorname{cotg}\frac{(2p+1)\,\pi}{2n}.$$

Доказателство. Тъй като $S_{n,\,k}(A_1)$ е сумата от k-тите степени на всички страни и диагонали, излизащи от върха A_1, ясно е, че $\sum_{n,\,k}=\frac{n}{2}S_{n,\,k}(A_1)$. Необходимите формули се получават от теорема 1 и теорема 2 при $\alpha=0$.

ЕДНО ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПРИНЦИПА ЗА СРАВНЯВАНЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ

Нека $P(z)=a_0+a_1z+\,\ldots\,+a_nz^n$ и $Q(z)=b_0+b_1z+\,\ldots\,+b_nz^n$ са два полинома на комплексната променлива z от степен n. Известно е, че ако стойностите на $P(z)$ и $Q(z)$ съвпадат за $n+1$ различни стойности на z, тези полиноми са тъждествено равни, т. е. $a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \ldots,\ a_n=b_n$. Този факт се нарича „принцип за сравняване на коефициентите" и той е еквивалентен на следното твърдение: Ако $P(z)$ е полином от n-та степен, който има $n+1$ различни корена, то $P(z)$ е тъждествено равен на 0, т. е. $a_0=a_1=\,\ldots\,=a_n=0$. Аналогичен факт е в сила и за тригонометрични полиноми, т. е. за функции от вида $f(\alpha)=a_0+(a_1\cos\alpha+b_1\sin\alpha)+\,\ldots\,+(a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha)$, където $a_0,\ a_k,\ b_k,\ (1\leqq k\leqq n)$ са комплексни числа.

Ще докажем това за един специален вид тригонометрични полиноми.

Лема 2. Ако тригонометричният полином $f(\alpha)=a_0+a_1\cos\alpha+\ldots+a_n\cos n\alpha$ има $2n+1$ различни корена в интервала $(0,2\pi)$, то $a_0=a_1=\ldots=a_n=0$.

Доказателство. Да положим $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$. От формулата на Моавър следва, че $\cos k\alpha=\frac{1}{2}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)$, т. е.

$$f(\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}a_k\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right).$$

Като приведем към общ знаменател, получаваме, че

$$f(\alpha)=\frac{1}{2z^n}\left[\sum_{k=0}^{n}a_kz^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}a_kz^{n+k}\right]. \tag{8}$$

Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}\in(0,2\pi)$ а $2n+1$ различни корена на $f(\alpha)$. Тогава от (8) следва, че комплексните числа $z_p=\cos\alpha_p+i\sin\alpha_p$, $1\leqq p\leqq 2n+1$, са $2n+1$ различни корена на полинома $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}a_kz^{n+k}$, който е от степен $2n$. От принципа за сравняване на коефициентите следва, че $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

КОГА ФУНКЦИЯТА $S_{n,\,k}(M)$ НЕ ЗАВИСИ ОТ ТОЧКАТА M?

Получените формули в теорема 1 и теорема 2 показват, че при решаването на поставения въпрос е естествено да се използува лема 2. Следващата теорема доказва предположението на Табов.

Теорема 3. Единствените стойности на k, за които функцията $S_{n,\,k}(M)$ не зависи от положението на точката M върху описаната окръжност на правилния n-ъгълник $A_1A_2\ldots A_n$, са $k=2, 4, \ldots, 2(n-1)$.

Доказателство. Ако $2k$ е четно число, за което $1\leqq k\leqq n-1$, от теорема 1 следва, че $S_{n,\,2k}(M)$ не зависи от M. Сега ще покажем, че не съществуват други естествени числа с това свойство. Ако предположим, че $k\geqq n$ и $S_{n,\,2k}(M)$ не зависи от точката M, от теорема 1 следва, че

$$f(\alpha)=\sum_{p=1}^{\left[\frac{k}{n}\right]}(-1)^{pn}\binom{2k}{k-pn}\cos pn\alpha$$

приема една и съща стойност за всяко $\alpha\in(0,2\pi)$. Да означим тази стойност с c. Тогава тригонометричният полином $f(\alpha)-c$ има безбройно много корени и съгласно лема 2 всички коефициенти на $f(\alpha)$ са 0. Но от вида на $f(\alpha)$ е ясно, че това е невъзможно (например коефициентът пред $\cos n\alpha$ е $(-1)^n\binom{2k}{k-n}\neq 0$). По същия начин с помощта на теорема 2 и лема 2 се доказва, че $S_{n,\,2k+1}(M)$ зависи от положението на точката M.

ДРУГИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Теорема 1 и теорема 2 дават възможност да се получат и други интересни метрични зависимости, свързани с правилните многоъгълници. Известно е, че ако $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ е правилен $(2n+1)$-ъгълник и M е точка от дъгата $\overset{\frown}{A_{2n+1}A_1}$ на описаната окръжност, то $|A_1M|+|A_3M|+\ldots+$

$+|A_{2n+1}M|=|A_2M|+|A_4M|+\ldots+|A_{2n}M|$. Следващата теорема обобщава този факт.

Теорема 4. Нека M е произволна точка от дъгата $\overset{\frown}{A_{2n+1}A_1}$ на окръжността, описана около правилния $(2n+1)$-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$. Тогава

$$A_1M^{2k+1}+A_3M^{2k+1}+\ldots+A_{2n+1}M^{2k+1}=A_2M^{2k+1}+A_4M^{2k+1}+\ldots+A_{2n}M^{2k+1}$$

при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказателство. Нека $\overset{\frown}{MA_1}=\alpha$. Тогава $|A_{2r+1}M|=2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2r\pi}{2n+1}\right)$.

Както в теорема 2 получаваме, че

$$\sum_{r=0}^{n}A_{2r+1}M^{2k+1}=$$

$$=2R^{2k+1}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{2k+1}{k-p}\frac{\sin\frac{(n+1)(2p+1)\pi}{2n+1}\sin\left[\frac{(2p+1)\alpha}{2}+\frac{n(2p+1)\pi}{2n+1}\right]}{\sin\frac{(2p+1)\pi}{2n+1}}.$$

От друга страна, имаме

$$\frac{\sin\frac{(n+1)(2p+1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2p+1)\pi}{2n+1}}=\frac{(-1)^p\cos\frac{(2p+1)\pi}{2(2n+1)}}{2\sin\frac{(2p+1)\pi}{2(2n+1)}\cdot\cos\frac{(2p+1)\pi}{2(2n+1)}}=\frac{(-1)^p}{2\sin\frac{(2p+1)\pi}{2(2n+1)}}\text{ и}$$

$$\sin\left[\frac{(2p+1)\alpha}{2}+\frac{n(2p+1)\pi}{2n+1}\right]=(-1)^p\cos(2p+1)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2(2n+1)}\right).$$

Като заместим в горното равенство, получаваме

$$\sum_{r=0}^{n}A_{2r+1}M^{2k+1}=R^{2k+1}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{2k+1}{k-p}\frac{\cos(2p+1)\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)}{\sin\frac{(2p+1)\pi}{2(2n+1)}}$$

и от теорема 2 следва, че

$$S_{2n+1,\,2k+1}(M)=2\sum_{r=0}^{n}A_{2r+1}M^{2k+1}.$$

С това теоремата е доказана.

За произволен правилен $2n$-ъгълник е в сила

Теорема 5. Нека M е произволна точка от описаната окръжност на правилния $2n$-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Тогава

$$A_1M^{2k}+A_3M^{2k}+\ldots+A_{2n-1}M^{2k}=A_2M^{2k}+A_4M^{2k}+\ldots+A_{2n}M^{2k}$$

при $k=1, 2, \ldots, n-1$.

Доказателство. Равенството се получава, като приложим теорема 1 към правилните n-ъгълници $A_1A_3\ldots A_{2n-1}$ и $A_2A_4\ldots A_{2n}$.

В заключение ще отбележим, че теорема 4 и 5 дават всички стойности на k, за които са изпълнени съответните равенства. Това може да се докаже аналогично на теорема 3.

О. МУШКАРОВ